

FONCTIONS DE CLASSE DE NILSSON

Mémoire de DEA de mathématiques

**présenté à l'université de NICE en juin 1982
sous la direction du prof. Jan-Erik Björk (Suède)**

**Frédéric DELFATTORE
Dany-Jack MERCIER**

FONCTIONS DE CLASSE DE NILSSONTable des Matières

• (Dany-Jack MERCIER)
 (Université de Nice / Sophia Antipolis)
 • (Frédéric DELFATTORE)

page

Chapitre 1 : Fonctions analytiques multiformes.

A	Prolongement analytique le long d'un chemin	1
B	Fonctions analytiques multiformes	11
C	Fonctions analytiques multiformes à détermination finie	27
D	Transformation de monodromie	32
E	Fonctions analytiques multiformes à détermination finie faible	36

Chapitre 2 : Classe de Nilsson.

A	Définitions	38
B	Fonctions algébriques	43
C	Chemins algébriques réguliers de $\mathbb{C}^n$	52
D	Images polynomiales (resp. algébriques) de fonctions de la classe de Nilsson	62

Chapitre 3 : Le théorème d'intégration de Nilsson.

A	Le lemme d'évitement	71
B	Intégration d'un germe le long d'un chemin	86
C	Théorème d'intégration	90
D	Intégration des formes rationnelles sur des cycles variables	107

Résumés et compléments

Fonctions de classe de Nilsson
 Classe de Nilsson
Généralités sur les revêtements

Bibliographie :

1/ Livres :

- [BJO] Björk J-E : Rings and differential operators.
- [CHE] Chevalley : Fonctions algébriques d'une variable (Am. M. Soc)
- [FOR] Forster : Riemannsche Flächen (Springer-Verlag n°184)
- [HWA] Hwa et Teplitz : Homology and Feynmann integrals (1966)
- [LANG] Lang S. : Introduction to algebraic and abelian functions (Addison-Wesley)
- [MA] Mac Lane et Birkhoff : Algèbre (Gauthier-Villars)

2/ Articles :

- [PHAM] Pham F. : Introduction à l'étude des intégrales singulières et des hyperfonctions (Séminaire sur les singularités, Hanoi 1974)
- [NIL 1] Nilsson N. : Some growth and ramification properties of certain integrals on algebraic manifolds (Arkiv för Matematik Band 5 n°32 p 453 ; 1964)
- [NIL 2] Nilsson N. : Monodromy and asymptotic properties of certain multiple integrals (Arkiv för Matematik ; 1979)

INTRODUCTION :

Ce mémoire reprend les idées exposées dans les notes de J-E BJORK sur l'article de N. NILSSON (NIL 1). Son but est de donner une preuve élémentaire de l'énoncé suivant sans utiliser le théorème de désingularisation d'HIRONAKA;

Enoncé : " Soient p un polynôme à $n+1$ variables , z^0 un point de $\mathbb{C}$ et f une fonction holomorphe sur un voisinage de $\{z_0\} \times [0,1]$. On suppose que

Alors si f se prolonge analytiquement dans $\mathbb{C}^{n+1} \setminus p^{-1}(0)$ (resp. est de classe de Nilsson) , la fonction g définie sur un voisinage de z^0 par l'intégrale :

$$g(z) = \int_0^1 f(z, y) dy$$

se prolonge analytiquement sur un certain ensemble $\mathbb{C}^n \setminus p^{-1}(0)$ (resp. est de classe de Nilsson). "

Quel sont les domaines où l'on peut rencontrer ce genre de problème? Considérons une équation différentielle de la forme : (1) $w'' + p(z)w' + q(z)w = 0$ avec les conditions initiales : $w(z^0) = c$ et $w'(z^0) = c$ et supposons que les coefficients $p(z)$ et $q(z)$ soient des fonctions analytiques dans le disque ouvert $\{z \in \mathbb{C} / |z - z^0| < R\}$. Un résultat classique affirme l'existence d'une solution de (1) analytique dans le disque D . Il est alors logique de se demander si le germe en z^0 induit par cette solution se prolonge analytiquement . Il est actuellement nécessaire d'utiliser tout l'arsenal de la topologie algébrique et de la géométrie analytique pour obtenir des résultats profonds . (cf. P. DELIGNE , Equations à points singuliers réguliers)

On peut aussi intégrer une forme différentielle sur un cycle dans une variété donnée , et considérer des intégrales du type :

$$e(t) = \int_{\gamma_t} \omega_t$$

INTRODUCTION

Ce mémoire reprend les idées exposées dans les notes de J.E. BJÖRK sur l'article de N. NILSSON [NIL 1]. Son but est de donner une preuve élémentaire de l'énoncé ci-dessous sans utiliser le théorème profond d'HIRONAKA qui demande des connaissances considérables :

" Si p désigne un polynôme à $n+1$ variables et à coefficients complexes, si z_0 est un point de $\mathbb{C}^n$ tel que $\{z_0\} \times [0,1] \subset \mathbb{C}^{n+1} \setminus p^{-1}(0)$, et si f est une fonction holomorphe sur un voisinage de $\{z_0\} \times [0,1]$, le résultat fondamental consiste à affirmer que si f se prolonge analytiquement dans $\mathbb{C}^{n+1} \setminus p^{-1}(0)$ (resp. est de classe de Nilsson) alors la fonction g définie sur un voisinage de z_0 par l'intégrale :

$$g(z) = \int_0^1 f(z, y) dy$$

se prolonge analytiquement sur un certain ensemble $\mathbb{C}^n \setminus p^{-1}(0)$ (resp. est de classe de Nilsson)."

Voyons quelques domaines où on peut rencontrer ce genre de problème :

- On considère une équation différentielle de la forme :

$$(1) \quad w'' + p(z)w' + q(z)w = 0$$

avec les conditions initiales :

$$(2) \quad \begin{cases} w(z_0) = c_0 \\ w'(z_0) = c_1 \end{cases}$$

Supposons que les coefficients $P(z)$ et $Q(z)$ soient des fonctions analytiques dans le disque ouvert $\{z \in \mathbb{C} / |z - z_0| < R\}$, alors un résultat classique dit qu'il existe une solution de (1),

vérifiant les conditions (2) qui est analytique dans $\{z \in \mathbb{C} / |z - z_0| < R\}$.
On peut se demander si on peut prolonger analytiquement le germe en z_0 induit par cette solution.

Actuellement pour avoir des résultats profonds on utilise tout l'arsenal de la Topologie algébrique et de la géométrie analytique.

(cf. P. DELIGNE, Equations différentielles à points singuliers réguliers)

— On peut aussi considérer des intégrales du type :

$$e(t) = \int_{\gamma_t} \omega_t$$

où on intègre une forme différentielle sur un cycle d'une variété.
E. PICARD a étudié ce genre d'intégrale au début du siècle. Il a été amené immédiatement à des considérations de Topologie, d'Analysis situs comme on disait à l'époque

(cf. E. PICARD et P. SIMART, Théorie des fonctions algébriques et de leurs intégrales).

Par la suite les résultats les plus importants ont été obtenus grâce aux méthodes nouvelles de la Topologie algébrique et de la Géométrie analytique (cf. J. LERAY, Le calcul différentiel et intégral sur les variétés analytiques complexes).

On peut appliquer ces méthodes aux intégrales de FEYNMAN qui se rencontrent en électrodynamique quantique (cf. F. PHAM, Thèse).

Les deux premiers chapitres introduisent les définitions et les résultats nécessaires pour un énoncé rigoureux de ce théorème et pour sa démonstration.

Décrivons ces chapitres plus précisément :

Chapitre 1 : Après avoir donné une définition naïve du prolongement analytique le long d'un chemin, on introduit le revêtement $\pi: \widehat{G} \rightarrow X$ qui permet d'obtenir facilement le théorème de monodromie.

Une fonction analytique multiforme sur une variété analytique complexe

et connexe X apparaît alors comme la donnée d'un germe de fonction analytique f_0 en un point x_0 de X qui se prolonge analytiquement le long de n'importe quel chemin de X d'origine x_0 et d'extrémité x pour donner naissance à un germe de fonction analytique noté $(f_0)_x$ au point x . Le prototype classique d'une fonction analytique multiforme sur $\mathbb{C}^*$ est le logarithme, ou encore la fonction z^α (ou $\alpha \in \mathbb{C}$).

L'ensemble des germes $(f_0)_x$ obtenus en x en prolongeant f_0 le long de tous les chemins de X d'origine x_0 et d'extrémité x constitue l'ensemble $S_F(x)$ des branches locales de la fonction analytique multiforme F au point x . $S_F(x)$ engendre un $\mathbb{C}$ -espace vectoriel $H_F(x)$ et on dira que F est une fonction analytique multiforme à détermination finie (resp. à détermination finie faible) si $S_F(x)$ est fini (resp. si $H_F(x)$ est de dimension finie). Par exemple la fonction $\sqrt{z}$ est à détermination finie sur $\mathbb{C}^*$, $(\log z)^m$ est à détermination finie faible (et $\dim_{\mathbb{C}} H_F(x) = m+1$) sur $\mathbb{C}^*$ et $\frac{1}{\log z}$ est à détermination infinie sur $\mathbb{C} \setminus \{0, 1\}$.

Après avoir vu une caractérisation des fonctions analytiques multiformes à détermination finie sur $\mathbb{C}^n \setminus W$ où W est une hypersurface de $\mathbb{C}^n$, le paragraphe D définit la transformation de monodromie T_γ associée à un chemin γ . Le paragraphe E montre enfin que toutes les fonctions analytiques multiformes à détermination finie faible sur $D^* = \{z \in \mathbb{C} / 0 < |z| < 1\}$ sont de la forme $\sum_{i \in I} z^{\sigma_i} P_i(\log z)$ où I est un ensemble fini d'indices, où $\sigma_i \in \mathbb{C}$ et où P_i est un polynôme dont les coefficients sont des fonctions holomorphes sur D^* .

Le Chapitre 2 débute avec la définition des fonctions de classe de Nilsson et dans le paragraphe suivant on examine le cas particulier des fonctions algébriques. Dans ce chapitre l'idée générale est de mesurer la croissance des fonctions analytiques multiformes qui est bien sûr liée à la nature des chemins de X . On est donc amené dans le paragraphe suivant à introduire les chemins algébriques réguliers de $\mathbb{C}^n$ qui forment une classe plus vaste que les chemins polynomiaux et à énoncer le théorème 2.19 qui nous est très précieux pour obtenir dans le dernier paragraphe

de nombreuses propriétés des fonctions de classe de Nilsson. Nous affirmerons en particulier que l'image polynômiale d'une fonction de classe de Nilsson est encore une fonction de classe de Nilsson.

Dans le Chapitre 3 on commence par démontrer un résultat technique important qui joue un rôle crucial dans la preuve du théorème d'intégration: le lemme d'évitement. Il s'agit de se donner une tresse constituée de m fonctions continues $a_1, \dots, a_m$ de $[0, 1]$ dans $\mathbb{C}$ telles que $a_i(t) \neq a_v(t) \quad \forall t \in [0, 1]$ et $i \neq v, i, v \in [1, m]$, vérifiant en outre $a_i(0) \notin [0, 1] \quad \forall i \in [1, m]$ et $a_i(t) \notin \{0, 1\} \quad \forall i \in [1, m]$ et $\forall t \in [0, 1]$ et de montrer l'existence d'une déformation continue φ_t laissant fixe 0 et 1 qui évite la tresse. Le paragraphe A montre seulement l'existence d'une telle application, mais ne donne pas de description précise de cette déformation. Une telle description est abordée dans l'article de Nilsson [NIL2] et permet d'obtenir un résultat intéressant concernant la transformation de monochromie de l'intégrale d'une fonction de la classe de Nilsson obtenue dans le théorème d'intégration 3.15 qui est énoncé dans le paragraphe C.

1. FONCTIONS ANALYTIQUES MULTIFORMES

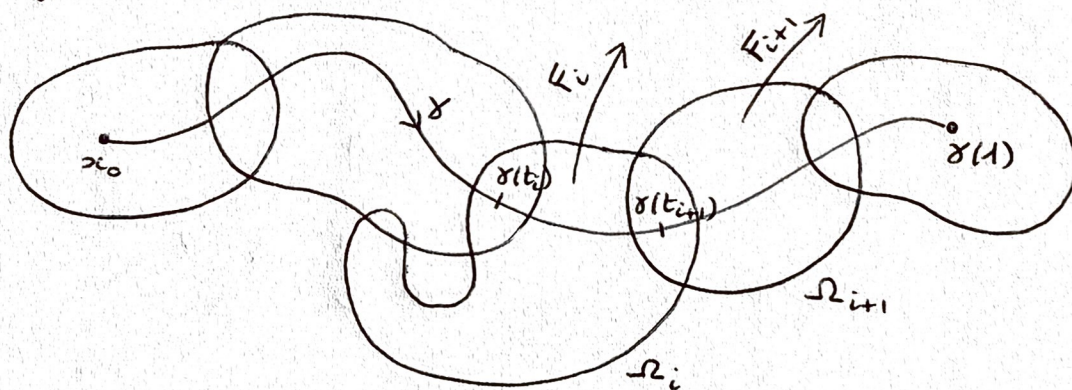
X désigne une variété analytique complexe de dimension $n \geq 1$ et $\mathcal{O}$ désigne le faisceau des fonctions holomorphes sur X . Si x est un élément de X , on désignera par $\mathcal{O}_x$ l'anneau local des germes de fonctions holomorphes en x . Si U est un ouvert de X , on désignera par $\mathcal{O}(U)$ l'anneau des fonctions holomorphes sur l'ouvert U .

A Prolongement analytique le long d'un chemin

1.1 Définition

Soient γ un chemin de X d'origine x_0 et $f_0 \in \mathcal{O}_{x_0}$. On dit que le germe f_0 peut être prolongé analytiquement le long du chemin γ si :

- 1) Il existe une subdivision $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = 1$ et des voisinages ouverts $\Omega_0, \dots, \Omega_{n-1}$ des ensembles $\gamma([t_i, t_{i+1}])$
- 2) $\exists F_i \in \mathcal{O}(\Omega_i)$ $0 \leq i \leq n-1$ telles que $F_i = F_{i+1}$ sur $\Omega_i \cap \Omega_{i+1}$ et telles que f_0 soit le germe induit par F_0 au point x_0 .



Notations: Si U est un ouvert contenant x et si $f \in \mathcal{O}(U)$, on note $p_x(f)$ le germe induit par f en x . Si $p_{x_0}(F_0) = f_0$. Dans le cas où la définition 1.1 est satisfaite, on note $(f_0)_\gamma = p_{\gamma(1)}(F_{n-1})$ et on dit que $(f_0)_\gamma$ est le germe induit en $\gamma(1)$ par le prolongement du germe f_0 le long du chemin γ . Le germe $(f_0)_\gamma$ ne dépend en effet que de f_0 et du chemin γ comme le montre la proposition suivante :

proposition :

Si le germe f_0 peut être prolongé analytiquement le long de γ ce prolongement analytique est unique et est noté $(f_0)_\gamma$

preuve :

Supposons que les conditions de la définition 3.1 soient vérifiées avec :

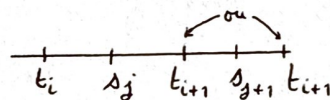
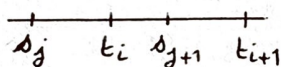
$$\begin{cases} s_0 = 0 < s_1 < \dots < s_m = 1 = s_{m+1} \\ \gamma([s_j, s_{j+1}]) \subset \Lambda_j \quad G_j = G_{j+1} \text{ dans } \Lambda_j \cap \Lambda_{j+1} \end{cases}$$

et

$$\begin{cases} t_0 = 0 < t_1 < \dots < t_n = 1 = t_{n+1} \\ \gamma([t_i, t_{i+1}]) \subset \Omega_i \quad F_i = F_{i+1} \text{ dans } \Omega_i \cap \Omega_{i+1} \end{cases}$$

pour $0 \leq j \leq m-1$ et $0 \leq i \leq m-1$

Montrons que si $[t_i, t_{i+1}] \cap [s_j, s_{j+1}] \neq \emptyset$ alors $G_j = F_i$ sur $\Lambda_j \cap \Omega_i$. Pour cela, supposons qu'il existe des paires $\{i, j\}$ telles que ce soit faux, il y en a une telle que $i+j$ soit minimal, $i+j > 0$ car si $i=j=0$, $0 \in [0, t_1] \cap [0, s_1]$ ce qui est exclu, il y a 2 cas :



supposons $t_i \geq s_j$ par exemple alors $i \geq 1$ car si $i=0$, $i=j=0$ ce qui est exclu. Par définition de (i, j) on a $[t_{i-1}, t_i] \cap [s_j, s_{j+1}] \neq \emptyset$ et $F_{i-1} = G_j$ sur $\Omega_{i-1} \cap \Lambda_j$. Par hypothèse on a aussi $F_{i-1} = F_i$ sur $\Omega_{i-1} \cap \Omega_i$ par conséquent $F_i = G_j$ sur $\Omega_{i-1} \cap \Omega_i \cap \Lambda_j$ qui est non vide car il contient $\gamma(t_i)$ or c'est une partie ouverte de l'ensemble connexe $\Omega_i \cap \Lambda_j$ donc $F_i = G_j$ sur $\Omega_i \cap \Lambda_j$ ce qui contredit la définition de i et j . Le cas $s_j \geq t_i$ est tout à fait analogue et notre assertion est démontrée. Appliquons-la avec $i=n$ et $j=m$ on obtient $[s_m, s_{m+1}] = [t_n, t_{n+1}] = \{1\}$ donc $G_m = F_n$ sur $\Lambda_m \cap \Omega_n$ par suite les germes de F_n et G_m en $\gamma(1)$ coïncident C.Q.F.D.

1.2. Définition équivalente

Soient γ un chemin de X d'origine x_0 et $f_0 \in \mathcal{O}_{x_0}$. f_0 est prolongeable analytiquement le long du chemin γ ssi il existe une famille $\varphi_t \in \mathcal{O}_{\gamma(t)}$ $0 \leq t \leq 1$ tq :

$$\varphi_0 = f_0$$

$$\forall \tau \in [0, 1] \quad \exists T \subset [0, 1], T \text{ voisinage de } \tau, \exists U \subset X \text{ tq } \gamma(T) \subset U \text{ et } \exists f \in \mathcal{O}(U) \text{ tq } \forall t \in T \quad \gamma_{\gamma(t)}(f) = \varphi_t$$

preuve :

• 1.1 $\Rightarrow$ 1.2 : Posons $\varphi_t = \rho_{\gamma(t)}(F_i) \in \mathcal{O}_{\gamma(t)}$ si $t_i \leq t \leq t_{i+1}$. On aura $\varphi_0 = f_0$ et si $\tau \in [0, 1]$, il existe un indice i tel que $\gamma(\tau) \in \Omega_i$.
 $\tau \in \gamma^{-1}(\Omega_i)$ et $\gamma^{-1}(\Omega_i)$ est ouvert. Il existe donc un intervalle ouvert T contenant τ et inclus dans $\gamma^{-1}(\Omega_i)$. Alors $\gamma(T) \subset \Omega_i$, $F_i \in \mathcal{O}(\Omega_i)$ et $\rho_{\gamma(t)}(F_i) = \varphi_t$ pour $t \in T$.

• 1.2 $\Rightarrow$ 1.1 : A chaque $x = \gamma(\tau) \in \gamma([0, 1])$ on peut associer un voisinage U_x tel que :

$\exists T$ voisinage de τ $T \subset [0, 1] / \gamma(T) \subset U_x \quad \exists \rho_x \in \mathcal{O}(U_x) / \rho_{\gamma(t)}(\rho_x) = \varphi_t \quad \forall t \in T$
 On obtient ainsi un recouvrement de $\gamma([0, 1])$ par les ouverts U_x . D'après le lemme 1.3 on peut extraire un sous-recouvrement fini $\{U_k\}_{k=0}^{n-1}$ de $\gamma([0, 1])$ tel qu'il existe une subdivision $t_0 = 0 < t_1 < \dots < t_n = 1$ vérifiant $\gamma([t_k, t_{k+1}]) \subset U_k \quad (0 \leq k \leq n-1)$.

Il suffit de constater que les U_k vérifient la définition 1.1.

1.3 lemme : Soient $u : [0, 1] \rightarrow X$ une application continue de $[0, 1]$ dans l'espace topologique X , et $\{U_x\}_{x \in X}$ un recouvrement d'ouverts de $u([0, 1])$. Il est possible d'extraire un sous-recouvrement fini de $u([0, 1])$ noté $\{U_k\}_{0 \leq k \leq n-1}$ tel qu'il existe une subdivision $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = 1$ vérifiant $u([t_k, t_{k+1}]) \subset U_k$ pour $0 \leq k \leq n-1$.

preuve : $\{u^{-1}(U_x)\}_{x \in u([0, 1])}$ est un recouvrement d'ouverts de $[0, 1]$. Si $t \in [0, 1]$, $u(t) = x \in U_x$, notons $C(t)$ un intervalle ouvert de $[0, 1]$ de centre t et inclus dans l'ouvert $u^{-1}(U_x)$.

Il est clair que 1) $[0, 1] = \bigcup_{t \in [0, 1]} C(t)$

2) $\forall t \in [0, 1] \quad u(C(t)) \subset U_{u(t)}$

On peut extraire un sous-recouvrement de $[0, 1]$ formé d'ouverts $C(t_k)$ $0 \leq k \leq n-1$.

Notons $V_k = C(t_k)$. On a :

$$[0, 1] = \bigcup_{k=0}^{n-1} V_k \quad \text{et} \quad u(V_k) \subset U_k \quad \text{où} \quad U_k \doteq U_{u(t_k)}$$

Les ouverts V_k sont connexes par construction, et quitte à réindexer les V_k , on peut trouver une suite croissante $t_0 = 0 < t_1 < \dots < t_n = 1$ telle que $[t_k, t_{k+1}] \subset V_k$.

En effet $t_0 \in V_0$. Notons $t'_1 = \sup \{t \in [0, 1] \mid [t_0, t] \subset V_0\}$. $t'_1 \notin V_0$ sinon $t'_1 + \varepsilon \in V_0$ pour ε petit, et donc $t'_1 \in V_1$ quitte à changer les indices. Mais alors il existe $\varepsilon > 0$ tel que $B(t'_1, \varepsilon) \subset V_1$, et donc $t_1 = t'_1 - \frac{\varepsilon}{2} \in V_0 \cap V_1$. Comme $t_0 \in V_0$ et $t'_1 \in V_1$, et comme V_0 est connexe, on aura $[t_1 + \varepsilon, 1] \cap V_0 = \emptyset$. Il suffit alors de recommencer ce travail un nombre fini de fois.

1.4 Autre interprétation du prolongement analytique le long d'un chemin.

Nous allons définir une topologie sur la réunion disjointe des $\mathcal{O}_x$ lorsque x varie dans X .

Posons $\hat{\mathcal{O}} = \bigcup_{x \in X} \mathcal{O}_x$. Si U est un ouvert de X et si $f \in \mathcal{O}(U)$, nous définissons :

$$[U, f] = \{p_x(f) \mid x \in U\} \subset \hat{\mathcal{O}}$$

Définissons l'application $\pi : \hat{\mathcal{O}} \longrightarrow X$

$$\forall p \in \mathcal{O}_x \longmapsto x$$

1.5 Proposition

L'ensemble des $[U, f]$ forme une base de topologie de $\hat{\mathcal{O}}$ et l'application $\pi : \hat{\mathcal{O}} \longrightarrow X$ est un homéomorphisme local (ie un revêtement non ramifié avec la terminologie de Forster)

preuve:

Notons $\mathcal{B}$ l'ensemble des parties $[U, f]$ de $\hat{G}$

1) Si $\varphi \in \hat{G}$ il existe $x \in X$ tel que $\varphi \in \mathcal{O}_x$ et nous pouvons prendre un représentant (U, f) du germe φ constitué d'un voisinage U de x et de $f \in \mathcal{G}(U)$ de sorte que $\varphi \in [U, f]$. Ainsi on a:

$$\hat{G} = \bigcup_{\substack{U \text{ ouvert de } X \\ f \in \mathcal{G}(U)}} [U, f]$$

Si $\varphi \in [U, f] \cap [V, g]$ il existe $x \in X$ tel que $\varphi \in \mathcal{O}_x$ d'où l'on déduit que $\varphi = \beta_x(f) = \beta_x(g) \Leftrightarrow \exists W \subset U \cap V$ tel que $f|_W = g|_W = h \in \mathcal{G}(W)$ il est alors clair que $\varphi \in [W, h] \subset [U, f] \cap [V, g]$ ainsi $\mathcal{B}$ est une base de topologie de $\hat{G}$.

2) Montrons maintenant que l'application:

$$\pi : \hat{G} \longrightarrow X \\ \varphi \in \mathcal{O}_x \longmapsto x$$

est un homéomorphisme local. Considérons $\pi|_{[U, f]} : [U, f] \rightarrow U$ elle est continue, bijective, (d'inverse $\beta_x(f)$), ouverte car si V est un ouvert quelconque de $[U, f]$, V s'écrit:

$$V = \bigcup_{i \in I} [U_i, f_i] \cap [U, f]$$

$$\text{donc } \pi(V) = \bigcup_{i \in I} \pi([U_i, f_i]) \cap \pi([U, f]) = \bigcup_{i \in I} U_i \cap U \text{ est un ouvert de } X$$

d'où 2).

Remarque

Il résulte de la proposition précédente que $\hat{G}$ peut être muni d'une structure de variété analytique complexe de dimension égale à celle de X grâce à l'homéomorphisme local π qui permet de "transporter" la structure de X sur $\hat{G}$ il est clair alors que π est une application holomorphe de $\hat{G}$ dans X

1.6. proposition:

La topologie de $\widehat{G}$ est séparée.

preuve:

Soient φ, ψ éléments distincts de $\widehat{G}$. On peut écrire $\varphi = f_x(f)$ et $\psi = g_y(g)$ où f (resp. g) est une fonction holomorphe au voisinage de x (resp. de y) alors:

$$\varphi \neq \psi \iff \begin{cases} 1) x \neq y \\ \text{ou} \\ 2) x = y \text{ et pour tout voisinage } W \text{ de } x, f|_W \neq g|_W \end{cases}$$

premier cas: $x \neq y$

X étant séparé il existe U voisinage de x et V voisinage de y tels que $U \cap V = \emptyset$

Comme $\pi: \widehat{G} \rightarrow X$ est continue $\pi^{-1}(U)$ est un voisinage de $f_x(f) = \varphi$ et $\pi^{-1}(V)$ un voisinage de $g_y(g) = \psi$ dans $\widehat{G}$ de plus:

$$\pi^{-1}(U) \cap \pi^{-1}(V) = \pi^{-1}(U \cap V) = \emptyset$$

second cas: $x = y$

choisissons W connexe alors $[W, f]$ est un voisinage de φ et $[W, g]$ un voisinage de ψ de plus $[W, f] \cap [W, g] = \emptyset$ car si $g_z(f) = g_z(g)$ était élément de cette intersection il existerait un voisinage W' de z dans W tel que:

$$f|_{W'} = g|_{W'}$$

par prolongement analytique on aurait donc $f|_W = g|_W$ ce qui est contraire à l'hypothèse.

1.7. Remarque

Nous avons défini un fibré $\pi: \widehat{G} \rightarrow X$ dont la fibre $\pi^{-1}(x)$ en x est l'ensemble G_x . Supposons que $\gamma \in \mathcal{B}(x_0, x_1)$ et que $f_0 \in G_{x_0}$, nous pouvons essayer de relever le chemin γ en un chemin $\widehat{\gamma}$ de $\widehat{G}$ tel que

$$\begin{cases} \gamma = \pi \circ \widehat{\gamma} \\ \text{et} \\ \gamma(0) = f_0 \in G_{x_0} \subset \widehat{G} \end{cases}$$

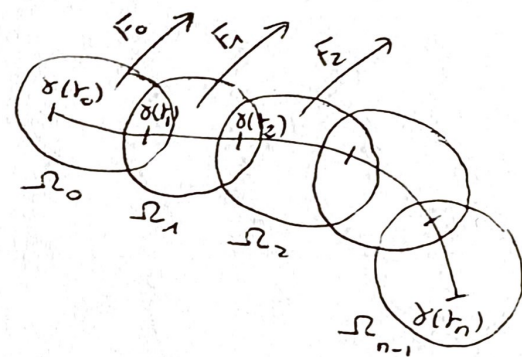
c'est l'objet de la proposition qui suit:

1.8 Proposition

Soient γ une courbe de X d'origine x_0 et $f_0 \in \mathcal{O}_{x_0}$ donnés. Le germe f_0 peut être prolongé analytiquement le long de la courbe γ ssi γ peut être relevée en une courbe $\hat{\gamma}$ de $\hat{\mathcal{O}}$ d'origine f_0 .

preuve :

1) Supposons que le germe $f_0 \in \mathcal{O}_{x_0}$ se prolonge analytiquement le long de γ . La définition 3.1 nous donne l'existence d'une suite $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = 1$, d'ouverts $\Omega_0, \dots, \Omega_{n-1}$ voisinages des $\gamma([t_i, t_{i+1}])$ et de fonctions $F_i \in \mathcal{O}(\Omega_i)$ tels que $\rho_{x_0}(F_0) = f_0$ et $F_i = F_{i+1}$ sur $\Omega_i \cap \Omega_{i+1}$.



Posez $\hat{\gamma}(t) = \rho_{\gamma(t)}(F_i)$ pour $t_i \leq t \leq t_{i+1}$. L'application $\hat{\gamma} : [0, 1] \rightarrow \hat{\mathcal{O}}$ est continue sur chacun des intervalles $[t_i, t_{i+1}]$ comme composée de 2 fonctions continues, à savoir :

* la fonction $\gamma|_{[t_i, t_{i+1}]} : [t_i, t_{i+1}] \rightarrow X$

* la fonction $X \rightarrow \hat{\mathcal{O}}$ définie et continue sur Ω_i comme $x \mapsto \rho_x(F_i)$

fonction réciproque de l'homéomorphisme $\pi|_{[\Omega_i, F_i]} : [\Omega_i, F_i] \rightarrow \Omega_i$.

En fait, $\hat{\gamma}$ est continue sur tout $[0, 1]$ puisque l'égalité $F_i = F_{i+1}$ sur $\Omega_i \cap \Omega_{i+1}$ montre que $\hat{\gamma}(t_i) = \rho_{\gamma(t_i)}(F_{i-1}) = \rho_{\gamma(t_i)}(F_i)$, pour $1 \leq i \leq n-1$.

Il est clair que $\pi \circ \hat{\gamma} = \gamma$ puisque $\forall t \ t_i \leq t \leq t_{i+1} \ \pi \circ \hat{\gamma}(t) = \pi(\rho_{\gamma(t)}(F_i)) = \gamma(t)$, et $\hat{\gamma}$ est bien ~~la~~ une courbe relevée de γ .

2) Inversement, supposons que le chemin γ se relève en un chemin $\hat{\gamma} : [0, 1] \rightarrow \hat{\mathcal{O}}$ d'origine f_0 .

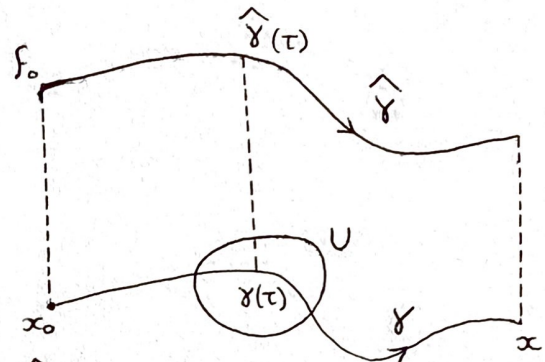
Ainsi $\hat{\gamma} : [0, 1] \rightarrow \hat{\mathcal{O}}$ est continue, et $\pi \circ \hat{\gamma} = \gamma$.

Posez $\varphi_t \doteq \hat{\gamma}(t) \in \mathcal{O}_{\gamma(t)}$, $0 \leq t \leq 1$, et vérifions les hypothèses de la définition 3.2.

$$\varphi_0 = \widehat{\gamma}(0) = f_0$$

soit $\tau \in [0, 1]$ il existe un voisinage ouvert de la forme $[U, f]$ de $\widehat{\gamma}(\tau)$ tel que la restriction :

$$\pi|_{[U, f]} : [U, f] \longrightarrow U$$



soit un homéomorphisme (cf. 1.5). $T =: \widehat{\gamma}^{-1}([U, f])$ est un ouvert contenant τ et $\gamma(T) = \pi \circ \widehat{\gamma}(T) \subset \pi([U, f]) = U$. On a $f \in \mathcal{O}(U)$. Comme $\pi \circ \widehat{\gamma} = \gamma$ on aura $\pi|_{[U, f]} \circ \widehat{\gamma}|_T = \gamma|_T$ et en utilisant la fonction réciproque de $\pi|_{[U, f]}$ i.e.

$$U \longrightarrow [U, f]$$

$$x \longmapsto \varphi_x(f)$$

on obtient :

$$\forall t \in T \quad \widehat{\gamma}(t) = \varphi_{\gamma(t)}(f)$$

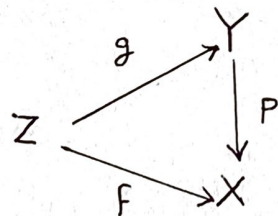
1.9. Remarque

Supposons $f_0 \in \mathcal{O}_{x_0}$ et $x_0 \in X$ fixés tels que $\pi(f_0) = x_0$, tout chemin γ d'origine x_0 dans X possède au plus un chemin $\widehat{\gamma}$ relevé d'origine $f_0 \in \mathcal{O}_{x_0}$. C'est une conséquence directe de la proposition 1.6 et de la proposition suivante sur l'unicité du relèvement des chemins.

1.10. Relèvements d'applications

Soient X et Y deux espaces topologiques $p: Y \rightarrow X$ est un revêtement non ramifié si p est un homéomorphisme local.

Soit Z un espace topologique. Le relèvement de l'application continue $f: Z \rightarrow X$ est par définition, une application continue $g: Z \rightarrow Y$ qui rend le diagramme suivant commutatif :



$$f = p \circ g$$

1.11 Proposition (unicité du relèvement)

Soient X et Y deux espaces topologiques séparés, $p: Y \rightarrow X$ un revêtement non ramifié et $f: Z \rightarrow X$ une application continue de l'espace topologique connexe Z dans X . Si deux relèvements g_1 et g_2 de f coïncident en un point $z_0 \in Z$ (ie $g_1(z_0) = g_2(z_0)$) alors $g_1 = g_2$.

preuve : voir par exemple [FOR] Théorème 4.8

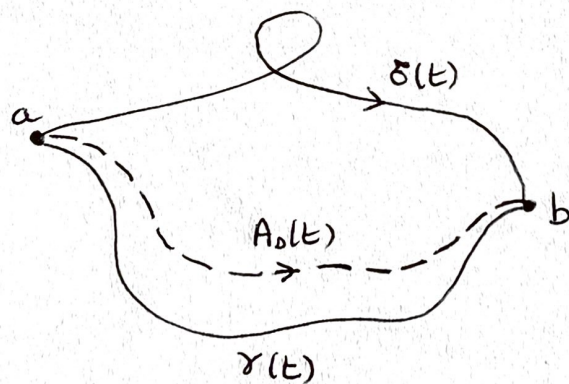
1.12 : Théorème (relèvement de 2 chemins homotopes)

Soient X et Y deux espaces topologiques séparés, $p: Y \rightarrow X$ un revêtement non ramifié, $(a, b) \in X \times X$ fixés et $\hat{a} \in Y$ tel que $p(\hat{a}) = a$. Si γ et δ sont deux chemins homotopes dans X à extrémités fixes a et b , notons $A: [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow X$ la déformation continue faisant passer de γ à δ , ie l'application continue qui vérifie :

$$\begin{cases} A(s, 1) = b \\ A(s, 0) = a \end{cases} \quad \begin{cases} A(0, t) = \gamma(t) \\ A(1, t) = \delta(t) \end{cases} \quad \forall (s, t) \in [0, 1]^2$$

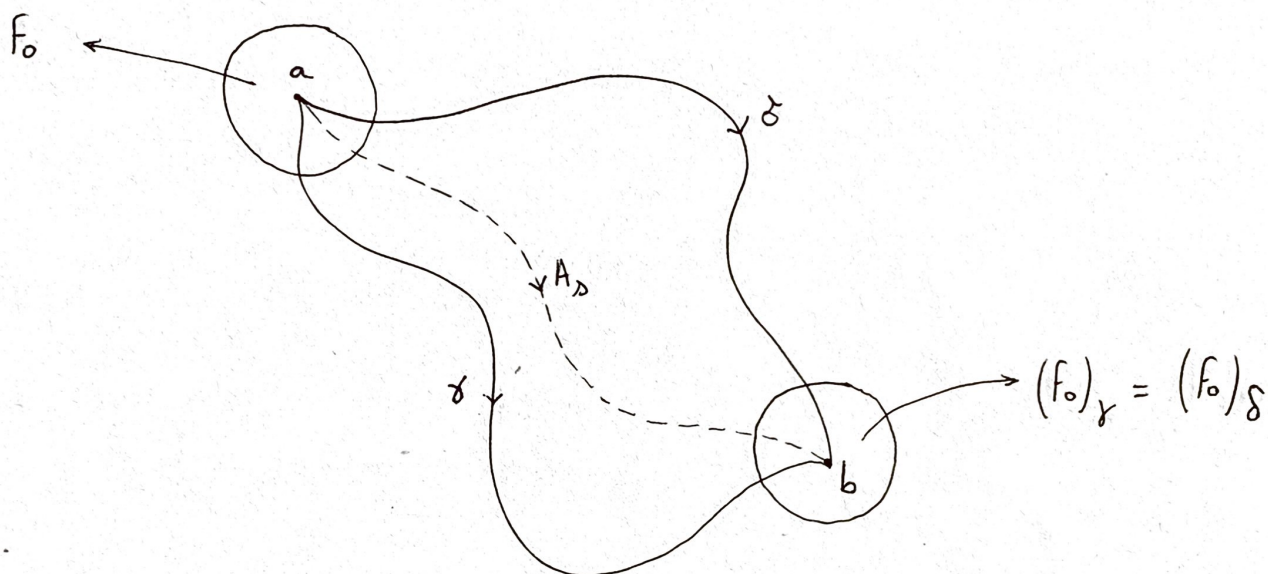
Supposons, en outre, que tous les chemins $A_s(t) \doteq A(s, t)$ se relèvent en un chemin $\hat{A}_s$ de Y d'origine $\hat{a}$. En particulier $\hat{A}_0 = \hat{\gamma}$ et $\hat{A}_1 = \hat{\delta}$. Alors les chemins $\hat{\gamma}$ et $\hat{\delta}$ ont la même extrémité et sont homotopes dans Y .

preuve : voir par exemple [FOR] Théorème 4.10



1.13. Théorème de Monodromie

Soit X une variété analytique complexe et connexe de dimension $n \geq 1$ sur $\mathbb{C}$. Soient γ et δ $[0,1] \rightarrow X$ deux chemins continus et homotopes d'origine a et d'extrémité b . Notons A_s une déformation continue faisant passer de γ à δ et donnons nous un germe $f_0 \in G_a$ en a qui se laisse prolonger analytiquement le long de chacun des chemins γ, δ, A_s ($0 \leq s \leq 1$). Alors les prolongements de f_0 le long de γ et δ engendrent le même germe en b (c'est à dire : $(f_0)_\gamma = (f_0)_\delta$ en utilisant la notation du 1.1)



preuve

D'après la proposition 1.6 les hypothèses du théorème 1.12 de relèvement des chemins homotopes: γ et δ sont homotopes et possèdent des relevées $\hat{\gamma}$ et $\hat{\delta}$ dans $\hat{G}$ grâce à la proposition 1.8. Cette même proposition montre que sous les hypothèses de 1.13 les chemins A_s se relèvent dans $\hat{G}$ en chemins $\hat{A}_s$ de même origine $f_0 \in \hat{G}$, le théorème 1.12 montre alors que les chemins $\hat{\gamma}$ et $\hat{\delta}$ ont même extrémité donc:

$$\hat{\gamma}(1) = \hat{\delta}(1) \iff \wp_b(F_{n-1}) = \wp_b(G_{n-1}) \quad \text{c.q.f.d.}$$

B Fonctions analytiques multiformes

X désigne toujours une variété analytique complexe, connexe de dimension $n \geq 1$.
On prendra par exemple $X = \mathbb{C} - \Sigma$ où Σ est un sous ensemble fini de $\mathbb{C}$.
Soit $x_0 \in X$ et $f_0 \in G_{x_0}$ donnés. On dira que f_0 définit une fonction analytique multiforme F sur X si f_0 peut être prolongé le long de tout chemin γ d'origine x_0 .

Plus précisément $F: X \longrightarrow \mathbb{C}$
 $x \longmapsto (f_0)_\gamma(x)$

où γ est un chemin liant x_0 à x et $(f_0)_\gamma$ le germe du prolongement de f_0 sur γ en $\gamma(1) = x$.

Evidemment $(f_0)_\gamma(x)$ peut prendre plusieurs valeurs possibles suivant γ lorsque x est fixé, d'où le nom "multiforme". $(f_0)_\gamma$ s'appelle une branche locale de la fonction multiforme F en x et l'on notera $S_F(x)$ l'ensemble des branches locales de F en x :

$$S_F(x) = \left\{ \varphi \in G_x / \exists \gamma \in \mathcal{C}(x_0, x) \quad \varphi = (f_0)_\gamma \right\}$$

Soit $x_0 \in X$. On peut poser :

$$MO_{x_0}(X) = \left\{ \text{Fonctions multiformes } F: X \rightarrow \mathbb{C} / \exists f_0 \in G_{x_0} \text{ prolongeable analytiquement sur tout } \gamma \in \mathcal{C}(x_0, x) \text{ où } x \in X, \text{ qui définit } F \right\}$$

1.14 - proposition:

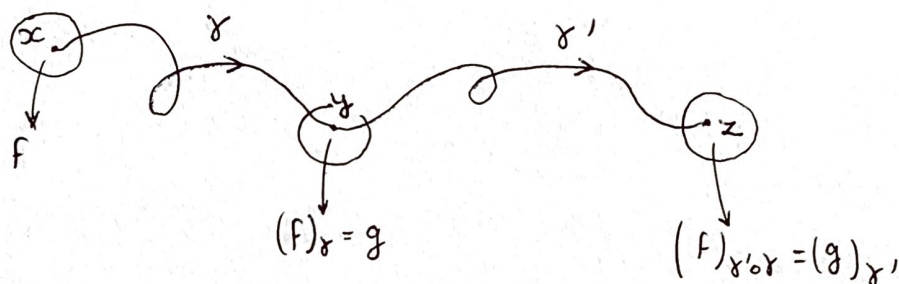
$$\forall x_0, x_1 \in X \quad MO_{x_0}(X) = MO_{x_1}(X)$$

preuve

Soit $F \in MO_{x_0}(X)$ et $f_1 \in S_F(x_1)$. Il existe un chemin $\delta \in \mathcal{C}(x_0, x_1)$ tel que $f_1 = (f_0)_\delta \Leftrightarrow f_0 = (f_1)_{\delta^{-1}}$. Soit $x \in X$ nous allons montrer que $f_1 \in G_x$, se prolonge analytiquement le long de tout chemin $\gamma' \in \mathcal{C}(x_1, x)$ par suite f_1 définit une fonction analytique multiforme F_1 qui n'est autre que F .

Nous aurons besoin des deux lemmes évidents suivants :

Lemme 1. Si $f \in \mathcal{O}_x$ et $g \in \mathcal{O}_y$, f se prolongeant sur $\gamma \in \mathcal{C}(x, y)$ et g se prolongeant sur $\gamma' \in \mathcal{C}(y, z)$ et si $(f)_\gamma = g$ alors f se prolonge sur $\gamma' \circ \gamma$ et $(f)_{\gamma' \circ \gamma} = (g)_{\gamma'}$.



Lemme 2. Si $f \in \mathcal{O}_x$ et $g \in \mathcal{O}_y$. Si f se prolonge sur $\gamma' \circ \gamma$ et si $(f)_\gamma = g$ où $\gamma \in \mathcal{C}(x, y)$ et $\gamma' \in \mathcal{C}(y, z)$ alors g se prolonge sur γ' et $(f)_{\gamma' \circ \gamma} = (g)_{\gamma'}$.

Retournons à $f_1 \in \mathcal{O}_{x_1}$.

f_1 se prolonge sur δ^{-1} et $(f_1)_{\delta^{-1}} = f_0$
 f_0 se prolonge sur $\gamma' \circ \delta \in \mathcal{C}(x_0, x)$ } $\Rightarrow$ (Lemme 1) f_1 se prolonge sur $\gamma' \circ \delta \circ \delta^{-1}$
 et $(f_1)_{\gamma' \circ \delta \circ \delta^{-1}} = (f_0)_{\gamma' \circ \delta}$

Ainsi

$$\begin{cases} \delta \circ \delta^{-1} \in \mathcal{C}(x_1, x_1) \\ \gamma' \in \mathcal{C}(x_1, x) \\ f_1 \text{ se prolonge sur } \gamma' \circ \delta \circ \delta^{-1} \\ \text{et } (f_1)_{\delta \circ \delta^{-1}} = (f_0)_\delta = f_1 \end{cases}$$

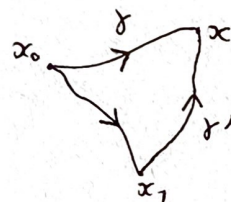
d'après le lemme 2, f_1 se prolonge sur γ' et de plus :

$$(f_1)_{\gamma'} = (f_1)_{\gamma' \circ \delta \circ \delta^{-1}} \text{ donc } (f_1)_{\gamma'} = (f_0)_{\gamma' \circ \delta}$$

ceci prouve que f_1 se prolonge sur $\gamma' \in \mathcal{C}(x_1, x)$ et donne naissance à une fonction analytique multiforme F_1 définie sur X . Montrons que $F_1 = F$ c'est à dire $S_F(x) = S_{F_1}(x) \forall x \in X$.

Soit $\varphi = (f_0)_\gamma \in S_F(x)$, $f_0 = (f_1)_{\delta^{-1}}$ d'après le lemme 1 on a donc :

$$\varphi = (f_0)_\gamma = (f_1)_{\gamma \circ \delta^{-1}} \text{ donc } \varphi \in S_{F_1}(x)$$



Inversement soit $\varphi = (f_1)_{\gamma'} \in S_{F_1}(x)$, le lemme 1 montre que $\varphi = (f_1)_{\gamma'} = (f_0)_{\gamma' \circ \delta}$ de sorte que $\varphi \in S_F(x)$ on a donc bien $S_F(x) = S_{F_1}(x)$ et $F_1 = F$. Cela nous montre aussi que $MO_{x_0}(X) \subset MO_{x_1}(X)$ et un raisonnement analogue au précédent montre que $MO_{x_1}(X) \subset MO_{x_0}(X)$ donc $MO_{x_0}(X) = MO_{x_1}(X)$ c.q.f.d.

1.15. Définition

Posons $MO(X) = MO_{x_0}(X) \forall x_0 \in X$, $MO(X)$ est appelé l'ensemble des fonctions multiformes sur X .

1.16. corollaire (de la proposition 1.14)

Soit $F \in MO(X)$. L'ensemble $S_F(x) = \{ \varphi \in \mathcal{O}_x / \exists \gamma \in \mathcal{C}(x_0, x) \varphi = (f_0)_{\gamma} \}$ des branches locales de F en x ne dépend pas du point x_0 choisi pour l'expliciter.

1.17. proposition

Soient $F \in MO(X)$; $x, y \in X$ les ensembles $S_F(x)$ et $S_F(y)$ sont en bijection

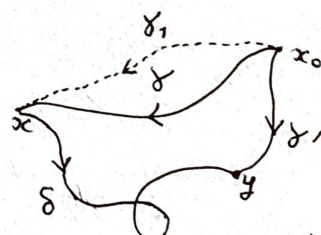
preuve
Par définition pour un $x_0 \in X$ fixé et pour un germe f_0 en x_0 donnant naissance à F on a:

$$S_F(x) = \{ (f_0)_{\gamma} \in \mathcal{O}_x / \gamma \in \mathcal{C}(x_0, x) \}$$

$$S_F(y) = \{ (f_0)_{\gamma'} \in \mathcal{O}_y / \gamma' \in \mathcal{C}(x_0, y) \}$$

Soit $\delta \in \mathcal{C}(x, y)$ fixé - Définissons l'application:

$$\begin{aligned} \psi: S_F(x) &\longrightarrow S_F(y) \\ (f_0)_{\gamma} &\longmapsto (f_0)_{\delta \circ \gamma} \end{aligned}$$



Cette application est bijective. En effet:

$$(f_0)_{\delta \circ \gamma} = (f_0)_{\delta \circ \gamma}, \text{ entraîne } (f_0)_{\gamma} = (f_0)_{\gamma'}, \text{ en prolongeant le long de } \delta^{-1}$$

donc ψ est injective, de plus soit $(f_0)_{\gamma'} \in \mathcal{O}_y$. Alors $\delta^{-1} \circ \gamma' \in \mathcal{C}(x_0, x)$ et comme $\delta \circ \delta^{-1}$ est homotope à zéro on a $\delta \circ \delta^{-1} \circ \gamma'$ homotope à γ' d'après le théorème de Monodromie (1.13) on a donc $(f_0)_{\gamma'} = (f_0)_{\delta \circ \delta^{-1} \circ \gamma'}$ donc $\psi((f_0)_{\delta^{-1} \circ \gamma'}) = (f_0)_{\gamma'}$ ce qui prouve que ψ est surjective et achève la preuve.

1.18 Fonctions multiformes comme sous-ensembles de $\hat{\mathcal{O}}$

Soit $f \in \hat{\mathcal{O}}$. On a $f = f_0 \in \mathcal{O}_{x_0}$ où x_0 est un point de X . Nous pouvons considérer la composante connexe W de f_0 dans $\hat{\mathcal{O}}$. Cette composante W nous donne toutes les continuations analytiques possibles du germe f_0 . En effet, si $\hat{\gamma}$ est une courbe dans W d'origine f_0 , notons $\gamma = \pi \circ \hat{\gamma}$ la courbe projetée de $\hat{\gamma}$ dans X . Alors $\gamma(0) = x_0$ et f_0 peut être prolongée analytiquement le long de γ avec $(f_0)_\gamma = \hat{\gamma}(1)$.

Si f_0 se prolonge le long de n'importe quel chemin γ de X (i.e si f_0 définit une fonction analytique multiforme dans X) alors $\pi(W) = X$ d'après la proposition 1.8.

Nous allons maintenant identifier les fonctions analytiques multiformes sur X à une classe de composantes connexes de $\hat{\mathcal{O}}$.

Notons $\mathcal{W}$ l'ensemble des composantes connexes W de $\hat{\mathcal{O}}$ telles que $\pi(W) = X$ et vérifiant la propriété (P):

(P) : Pour tout $x \in X$ il existe un voisinage ouvert de x noté U et des ouverts V_j ($j \in J$) de $\hat{\mathcal{O}}$ inclus dans W et deux à deux distincts, tels que $\pi^{-1}(U) \cap W = \bigcup_{j \in J} V_j$ où $\pi|_{V_j} : V_j \rightarrow U$ est un homéomorphisme.

1.19 Proposition : Il existe une bijection entre l'ensemble $MO(X)$ des fonctions analytiques multiformes et $\mathcal{W}$.

preuve : Fixons $x_0 \in X$ et considérons l'application :

$$\begin{array}{ccc} \Psi : MO(X) & \longrightarrow & \mathcal{W} \\ F & \longmapsto & W \end{array}$$

où W est obtenu de la manière suivante : on choisit une branche locale de F en x_0 que l'on note f_0 , et l'on note W la composante connexe de f_0 dans $\hat{\mathcal{O}}$.

* L'application Ψ est bien définie puisque si $f_1 \in S_F(x_0)$ désigne une autre branche locale de F en x_0 , $f_1 = (f_0)_\delta$ où δ est un lacet d'origine x_0 : $f_1 \in W$ donc $W_1 \subset W$ en notant W_1 la composante connexe de f_1 dans $\hat{\mathcal{O}}$. De la même manière $W \subset W_1$ puisque $(f_0) = (f_1)_{\delta^{-1}}$. Donc $W_1 = W$.

On a déjà montré que W se projette sur tout X , mais il nous reste à voir si W possède la propriété (P): Notons $\tilde{\pi} = \pi|_W$ la restriction de π à W . Le fibré $\tilde{\pi}: W \rightarrow X$ est commode pour deux raisons:

1) Il vérifie $\tilde{\pi}^{-1}(x) = S_F(x)$, donc $W = \bigcup S_F(x)$

2) Si x et y sont dans X et si $\gamma \in \mathcal{C}(x, y)$, $x \in X$ prenons $f \in \tilde{\pi}^{-1}(x)$.

$f \in S_F(x)$ se prolonge le long du chemin γ , et γ se relève en un chemin $\hat{\gamma}$ de $\hat{\mathcal{O}}$ d'origine $f \in W$. De plus, le chemin $\hat{\gamma}$ est nécessairement inclus dans la composante connexe par arcs W .

Soit $x \in X$ fixé et U un voisinage ouvert de x supposé connexe par arcs et simplement connexe. Notons $\tilde{\pi}^{-1}(x) = \{f_j \mid j \in J\}$ la fibre de $\tilde{\pi}$ en x , et $h: U \rightarrow X$ l'injection canonique.

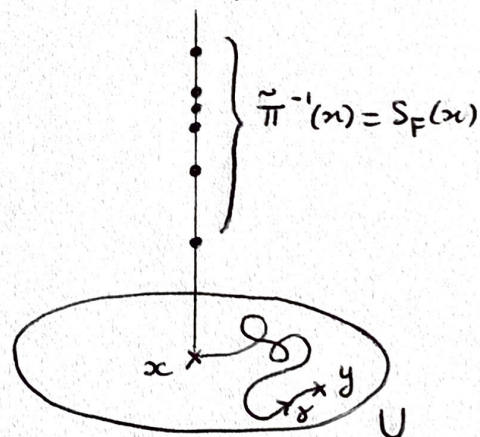
Montrons que h se relève dans W en applications $\tilde{h}_j: U \rightarrow W$ telles que $\hat{f}_j(x) = f_j$, applications d'ailleurs parfaitement définies par cette condition (cf. unicité du relèvement lorsque U est connexe)

Fixons $f_j \in \tilde{\pi}^{-1}(x)$, $y \in U$ et $\gamma \in \mathcal{C}(x, y)$.

Le chemin γ se relève en un chemin $\hat{\gamma}$ de W d'origine f_j . Posons $\tilde{h}_j(y) = \hat{\gamma}(1)$.

Cette définition ne dépend pas du choix du chemin γ puisque si $\gamma' \in \mathcal{C}(x, y)$ est un autre chemin de U , γ sera homotope à γ' et $\hat{\gamma}(0) = \hat{\gamma}'(0) = f_j$ montrent que $\hat{\gamma} = \hat{\gamma}'$ (unicité du relèvement des chemins)

On a par construction: $h_j = \tilde{\pi} \circ \tilde{h}_j$



Montrons que $\hat{h}_j : U \rightarrow W$ est continue : si $y \in U$ et si $\beta \doteq \hat{h}_j(y) \in W$, soit V un voisinage ouvert de β . $\tilde{\pi}$ est non ramifié, et nous pouvons supposer que $\tilde{\pi}|_V : V \rightarrow U_1 \doteq \tilde{\pi}^{-1}(V)$ est un homéomorphisme.

Il existe un ouvert U_2 connexe par arcs tel que $x \in U_2 \subset U_1$. Alors nous avons : $\hat{h}_j(U_2) \subset V$.

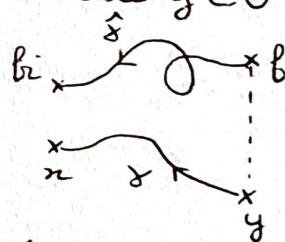
En effet, si $y' \in U_2$ et si $\gamma' \in \mathcal{C}(x, y')$ est une courbe dans U_2 ,

$$\hat{h}_j(y') = \hat{\gamma}'(1) = (\tilde{\pi}|_V)^{-1}(\gamma'(1)) \in V.$$

Définissons $V_j \doteq \hat{h}_j(U)$ pour tout $j \in J$. Les V_j sont disjoints 2 à 2 puisque si $\hat{h}_j(x) = \hat{h}_k(y)$, en composant par $\pi : x = y$, d'où $\hat{h}_j(x) = \hat{h}_k(x)$, et l'unicité du relèvement de h montre que $\hat{h}_j = \hat{h}_k$ c à d que $j = k$.

$$\text{On aura bien } \tilde{\pi}^{-1}(U) = \bigcup_{j \in J} V_j.$$

Il est clair que $\bigcup_{j \in J} V_j \subset \pi^{-1}(U)$. Si $\beta \in \pi^{-1}(U)$, il existe $y \in U$ tel que $\beta \in S_F(y)$ et si $\gamma \in \mathcal{C}(y, x)$, β se prolonge le long de γ pour donner un germe β_i en x (pour une certaine valeur de l'indice $i \in \mathbb{I}$).



En notant $\hat{\gamma}$ le chemin relevé dans W , on aura $\hat{h}_i(y) = \beta \Rightarrow \beta \in V_i$.

Enfin, $\tilde{\pi}|_{V_j} : V_j \rightarrow U$ est un homéomorphisme, puisque $\tilde{\pi} \circ \hat{h}_j = \text{Id}_U$ et $\hat{h}_j \circ \tilde{\pi} = \text{Id}_{V_j}$, $\hat{h}_j$ étant continue sur U .

Nous avons bien montré la propriété (P)

* Si $\Psi(F) = \Psi(G) = W$, montrons que $F = G$.

Notons $f_0 \in S_F(x_0)$ et $g_0 \in S_G(x_0)$. Par hypothèse $f_0 \in W$ et $g_0 \in W$. Comme W est connexe par arc, il existe un chemin $\hat{\gamma}$ de $\hat{\mathcal{O}}$ d'origine f_0 et d'extrémité g_0 . Notons $\gamma = \pi \circ \hat{\gamma}$ le chemin projeté. Le germe $f_0 \in \mathcal{O}_{x_0}$ se prolonge analytiquement le long de γ (cf. prop. 3.8) et nous aurons $(f_0)_\gamma = \hat{\gamma}(1) = g_0$. Donc $S_F(x_0) \cap S_G(x_0) \neq \emptyset$, et le lemme suivant permet de conclure :

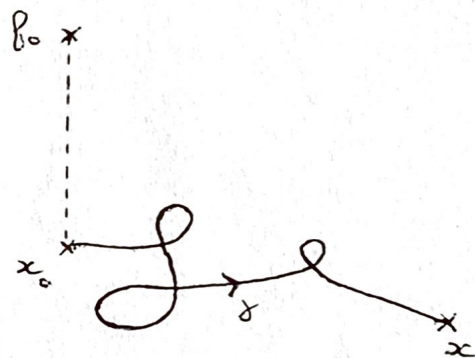
lemme : $F, G \in \text{MO}(X)$ $S_F(x_0) \cap S_G(x_0) \neq \emptyset \Rightarrow F = G$

preuve du lemme : Si $\xi \in S_F(x_0) \cap S_G(x_0)$, les fonctions F et G seront déterminées par les prolongements du même germe $\xi \in \mathcal{O}_{x_0}$ le long de toutes les courbes γ d'origine x_0 (prop 1.14)

* Montrons la surjectivité de Ψ .

Soit $W \in \mathcal{W}$. Comme $\pi(W) = X$, nous pouvons choisir $f_0 \in W$ tel que $\pi(f_0) = x_0$.

Il faut arriver à montrer que le germe f_0 se prolonge sur toutes les courbes $\gamma \in \mathcal{C}(x_0, x)$ en une fonction analytique. Cela montrera bien l'existence de $F \in \text{MO}(X)$ telle que $\Psi(F) = W$



D'après la proposition 3.8, tout revient à montrer que le chemin $\gamma \in \mathcal{C}(x_0, x)$ se relève en une courbe $\hat{\gamma}$ de $\hat{\mathcal{O}}$ (en fait dans $W \subset \hat{\mathcal{O}}$).

Pour $0 \leq t \leq 1$, la propriété (P) nous donne une collection de voisinages ouverts $U_{\gamma(t)}$ de $\gamma(t)$ qui recouvre le compact $\gamma([0, 1])$. D'après le lemme 3.3, on peut extraire un sous-recouvrement fini $\{U_k\}_{k=0}^{n-1}$, qui, compte tenu de la compacité $[0, 1]$, soit tel qu'il existe une suite croissante $t_0 = 0 < t_1 < \dots < t_n = 1$ telle que : $(0 \leq k \leq n-1)$

$$1) \gamma([t_k, t_{k+1}]) \subset U_k$$

$$2) \pi^{-1}(U_k) \cap W \subseteq \bigcup_{j \in \overline{J}_k} V_{j,k} \text{ où les } V_{j,k} \text{ sont disjoints } \forall k \geq 2,$$

$V_{j,k} \subset W$, $V_{j,k}$ ouverts et $\pi|_{V_{j,k}} : V_{j,k} \rightarrow U_k$ soit un homéomorphisme.

Montrons l'existence de la relevée $\hat{\gamma}$ par récurrence sur k pour $0 \leq k \leq n-1$.
L'hypothèse de récurrence au rang k est la suivante :

« Il existe un relèvement de $\gamma|_{[0, t_k]}$ dans W , noté $\hat{\gamma}|_{[0, t_k]}$ »

Le début de la récurrence est trivial : si $k=0$, $\hat{\gamma}(0) = f_0 \in W$. Supposons que $\hat{\gamma}|_{[0, t_k]} : [0, t_k] \rightarrow W$ soit le chemin relevé de $\gamma|_{[0, t_k]}$ dans W , alors $\hat{\gamma}|_{[0, t_k]}(t_k) = w_k$ et $x_k \doteq \pi(w_k) = \gamma|_{[0, t_k]}(t_k) \in U_k$

Donc $\pi^{-1}(x_k) \cap W \subset \pi^{-1}(U_k) \cap W = \bigcup_{j \in J_k} V_{j,k}$ et $w_k \in \bigcup_{j \in J_k} V_{j,k}$

Il existe donc $j \in J_k$ tel que $w_k \in V_{j,k}$. On considère alors l'homéomorphisme $\pi|_{V_{j,k}} : V_{j,k} \rightarrow U_k$ et l'on pose pour $t_k \leq t \leq t_{k+1}$: $\hat{\gamma}(t) = (\pi|_{V_{j,k}})^{-1}(\gamma(t))$.
L'application $\hat{\gamma}|_{[0, t_{k+1}]}$ qui s'en déduit est bien continue.

CQFD

1.20 Remarques:

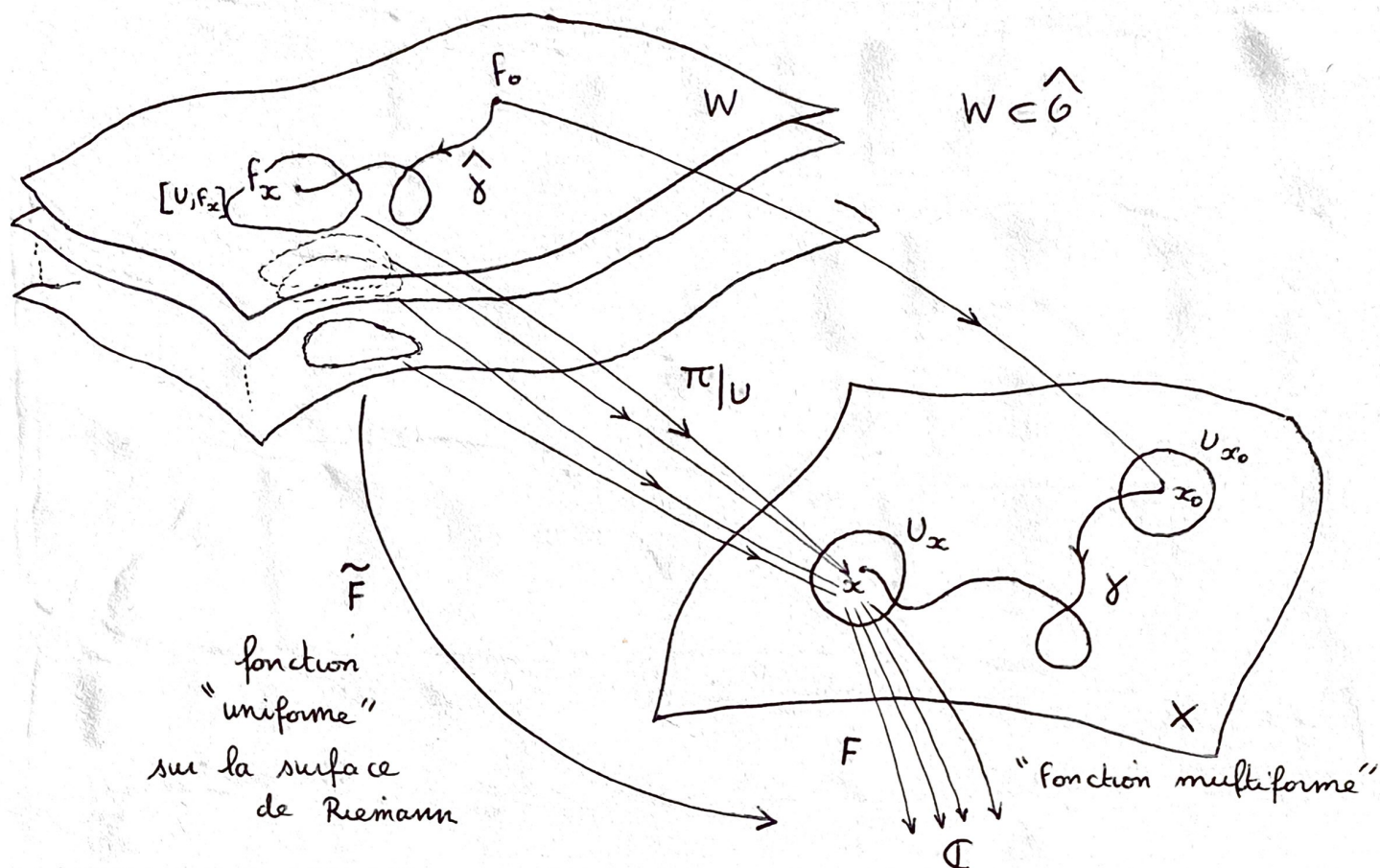
- 1) En conservant les notations précédentes et en notant $f_0 \in \mathcal{O}_{x_0}$, on constate que l'on peut éviter de parler de fonctions multiformes en considérant l'application composée $\tilde{F}$:

$$\begin{array}{ccc} W & & \\ \tilde{\pi} \downarrow & \searrow \tilde{F} & \\ X & \xrightarrow{F} & \mathbb{C} \end{array}$$

En désignant par $(f_0)_{\gamma, x}$ le germe obtenu au point x après prolongement du germe f_0 en x_0 le long du chemin $\gamma \in \mathcal{C}(x_0, x)$, et par $(f_0)_{\gamma, x}(x)$ la valeur au point x de n'importe quelle fonction analytique définie au voisinage de x dans la classe de $(f_0)_{\gamma, x}$, on a : $\tilde{F}((f_0)_{\gamma, x}) = (f_0)_{\gamma, x}(x)$.

Compte tenu de la structure analytique de W , $\tilde{F}$ apparaît comme une fonction analytique uniforme sur W . Nous pouvons faire le dessin suivant (*):

[(*) voir Annexe : "Généralités sur les revêtements" à la fin du mémoire]



"fonction
"uniforme"
sur la surface
de Riemann

"fonction multiforme"

2)

Signalons le théorème de Poincaré - Volterra : Toute fonction multiforme sur $\mathbb{C} \setminus \Sigma$ (où Σ est un ensemble fini) possède au plus un nombre dénombrable de déterminations. Avec les notations de 1.18 on aura $\pi^{-1}(U) \cap W = \bigcup_{j \in J} V_j$ où J est dénombrable.

$\mathbb{C}$ est séparable : notons D un ensemble dénombrable partout dense de $\mathbb{C}$. Si $x_0 \in \mathbb{C} \setminus \Sigma$ est fixé, notons $\pi(x_0, a_1, \dots, a_{n-1}, x_0)$ le chemin polygonal de sommets $x_0, a_1, \dots, x_0$ et $D_*^n = \{(a_1, \dots, a_{n-1}) \in D^{n-1} / \pi(x_0, a_1, \dots, a_{n-1}, x_0) \subset \mathbb{C} \setminus \Sigma\}$.

Soit Ψ l'application : $\Psi : D_*^n \longrightarrow S_F(x_0)$

$$(a_1, \dots, a_{n-1}) \longmapsto (f_0)_{\pi(x_0, \dots, a_{n-1}, x_0)}$$

D_*^n est dénombrable et l'image de Ψ est l'ensemble S_F^n des germes $(f_0)_\gamma$ obtenus par prolongement le long de tout chemin $\gamma \in \mathcal{C}(x_0)$ de "longueur n ", ie tel que le nombre minimal d'ouverts $\Omega_0, \dots, \Omega_{n-1}$ satisfaisant la définition 1.1 soit n . En effet, si γ est un tel chemin il existe $a_i \in \Omega_{i-1} \cap \Omega_i \cap D$ ($1 \leq i \leq n-1$), et le chemin polygonal $\pi(x_0, a_1, \dots, a_{n-1}, x_0)$ est homotope à γ dans $\mathbb{C} \setminus \Sigma$. Donc $(f_0)_\gamma = (f_0)_{\pi(x_0, \dots, a_{n-1}, x_0)}$.

Finalement $S_F(x_0) = \bigcup S_F^n$ est réunion dénombrable d'ensembles au plus dénombrable, ce qui $^{n \in \mathbb{N}}$ prouve la remarque.

1.21 Définition de l'espace vectoriel $H_F(x)$

Si F est une fonction analytique multiforme sur X et si $x \in X$ on note $H_F(x)$ le $\mathbb{C}$ -espace vectoriel engendré par $S_F(x) \subset \mathcal{O}_x$.

1.22 Lemme : Soit I un ensemble fini d'indices et $\{f_i\}_{i \in I}$ une famille de germes en x . On pose $\beta = \sum_{i \in I} c_i f_i$ où $c_i \in \mathbb{C}$. Si chaque germe $f_i \in \mathcal{O}_x$ est prolongeable analytiquement le long du chemin γ , alors β l'est aussi, et $(\beta)_\gamma = \sum_{i \in I} c_i (f_i)_\gamma$.

preuve :

On utilise la proposition 3.8.

f_i se prolonge le long de γ , donc le chemin γ se relève dans $\hat{\mathcal{O}}$ en un chemin $\hat{\gamma}_i$ d'origine $f_i \in \mathcal{O}_x$.

Considérons la courbe $\hat{\gamma}(t) = \sum_{i \in I} c_i \hat{\gamma}_i(t)$.

$\hat{\gamma}$ est un chemin de $\hat{\mathcal{O}}$ d'origine $\hat{\gamma}(0) = \sum_{i \in I} c_i f_i = \beta$, et de plus :

$$\hat{\gamma}_i(t) \in \mathcal{O}_{\gamma(t)} \Rightarrow \sum_{i \in I} c_i \hat{\gamma}_i(t) \in \mathcal{O}_{\gamma(t)} \Rightarrow \pi \circ \hat{\gamma}(t) = \gamma(t) \quad \text{où } 0 \leq t \leq 1$$

Le chemin γ se relève donc en un chemin $\hat{\gamma}$ de $\hat{\mathcal{O}}$, et β se prolonge analytiquement le long de γ . De plus : $(\beta)_\gamma = \hat{\gamma}(1) = \sum_{i \in I} c_i \hat{\gamma}_i(1) = \sum_{i \in I} c_i (f_i)_\gamma$

CQFD

1.23 Proposition

Les espaces vectoriels $H_F(x)$ sont isomorphes entre eux lorsque x décrit X .

preuve : Soient x et y deux points de X . X est une variété connexe donc connexe par arcs, et il existe un chemin $\delta \in \mathcal{C}(x, y)$.

L'application $\Psi : S_F(x) \longrightarrow S_F(y)$ est une bijection d'après 1.17.

$$\beta \longmapsto (\beta)_\delta$$

Notons $\{f_i\}_{i \in I}$ un système libre maximal de $S_F(x)$. C'est une base de l'espace vectoriel $H_F(x)$, et nous pouvons considérer l'application linéaire $\tilde{\Psi} : H_F(x) \rightarrow H_F(y)$ qui vaut $(f_i)_\delta$ sur chaque vecteur de base f_i . Montrons que $\tilde{\Psi}$ est un isomorphisme, ie que la partie $\{(f_i)_\delta\}_{i \in I}$ est une base de l'espace $H_F(y)$.

* Si $\sum c_i (f_i)_\delta = 0$, où $J \subset I$, J fini, en prolongeant ces germes le long γ^{∞} du chemin δ^{-1} et en appliquant le lemme 1.22, on obtient :

$$\left(\sum_J c_i (f_i)_\delta \right)_{\delta^{-1}} = (0)_{\delta^{-1}} \Rightarrow \sum_J c_i (f_i)_{\delta^{-1} \circ \delta} = 0$$

d'où $c_i = 0 \quad \forall i \in J$. Le système $\{(f_i)_\delta\}$ est un système libre dans $\mathcal{O}_y$.

* $\forall \beta \in S_F(x) \exists J \subset I$ J fini $\exists c_i (i \in J) / \beta = \sum_{i \in J} c_i f_i$

Le lemme 1.22 montre que :

$(\beta)_\delta = \sum_{i \in J} c_i (f_i)_\delta$, ce qui montre clairement que $\{(f_i)_\delta\}_{i \in I}$ engendre chacun γ^{∞} des vecteurs de $S_F(y)$. $\{(f_i)_\delta\}_{i \in I}$ est donc une base de $S_F(y)$.

Remarquons que $\tilde{\Psi}$ prolonge Ψ .

1.24 Définition

Soit F une fonction analytique multiforme sur X . On dit que F est à détermination finie (resp. à détermination finie faible) lorsque les sous-ensembles $S_F(x)$ sont finis (resp. les espaces vectoriels $H_F(x)$ sont de dimension finie sur $\mathbb{C}$).

1.25 Exemples

1°) Soient $X = \mathbb{C}^*$ et $\alpha \in \mathbb{C}$. La fonction analytique multiforme $F(z) = z^\alpha$ possède une détermination finie faible, et $H_F(x)$ est de dimension 1. Prenons $z \in \mathbb{C}^*$ fixé. Un germe en z donnant naissance à F est, par exemple : $f_0 = z^\alpha = e^{\alpha \ln|z| + i\alpha \arg z}$ où $0 \leq \arg z < 2\pi$, et toutes les autres branches de F en z sont données par $f_0 \cdot e^{ik2\pi\alpha}$ où $k \in \mathbb{Z}$. Ainsi $S_F(z) = \{f_0 \cdot e^{ik2\pi\alpha} / k \in \mathbb{Z}\}$ engendre un sev de $\mathcal{O}_z$ de dimension 1 dont une base est f_0 . Cependant $S_F(z)$ est fini si $\alpha \in \mathbb{Q}$, et infini si $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Q}$.

2°/ Pour $X = \mathbb{C}^*$ et $m \in \mathbb{N}^*$, considérons $F = (\ln z)^m$. C'est une fonction analytique multiforme à détermination finie faible, et $H_F(x)$ est de dimension $m+1$.

Prendons $z_0 \in \mathbb{C}^*$ et désignons par $f_0 \in \mathcal{O}_{z_0}$ une branche locale de $\ln z$ en z_0 . Elle est donnée par une expression $f_0 = \ln |z| + i \arg z$ où $\arg z$ est bien défini au voisinage de z_0 . Par exemple, si z_0 n'est pas sur l'axe réel négatif, $-\pi < \arg z < \pi$.

Nous avons $S_F(z_0) = \{ (f_0 + i k' 2\pi)^m / k' \in \mathbb{Z} \}$.

$(f_0 + i k' 2\pi)^m = \sum_{k=0}^m C_m^k (i k' 2\pi)^{m-k} f_0^k$ appartient à l'espace vectoriel E_m engendré par la famille $(e_0, f_0, \dots, f_0^m)$ où e_0 désigne le germe 1 en z_0 .

$(e, f_0, \dots, f_0^m)$ est un système libre dans $\mathcal{O}_{z_0}$: On le montre par récurrence sur m , le résultat est évident si $m=0$. S'il est vrai au rang $m-1$, considérons la combinaison linéaire nulle $c_0 e_0 + c_1 f_0 + c_2 f_0^2 + \dots + c_m f_0^m = 0$ dans $\mathcal{O}_{z_0}$. Elle signifie que, sur un voisinage convenable U de z_0 , nous aurons:

$$\forall z \in U \quad c_0 + c_1 \ln z + c_2 (\ln z)^2 + \dots + c_m (\ln z)^m = 0$$

La fonction $z \mapsto \ln z$ est holomorphe dans U , de dérivée $\frac{1}{z}$. En dérivant l'expression précédente:

$$\forall z \in U \quad \frac{c_1}{z} + \dots + \frac{m c_m}{z} (\ln z)^{m-1} = 0$$

On peut supposer que $0 \notin U$, donc:

$$\forall z \in U \quad c_1 + 2c_2 \ln z + \dots + m c_m (\ln z)^{m-1} = 0$$

On applique l'hypothèse de récurrence:

$$c_1 = 2c_2 = \dots = m c_m = 0$$

$$\text{D'où } c_0 = c_1 = \dots = c_m = 0.$$

Nous avons donc $H_F(z_0) \subset E_m$ et $\dim E_m = m+1$. Montrons que l'on a $H_F(z_0) = E_m$ par récurrence sur $m \geq 0$, l'hypothèse de récurrence étant la suivante:

$$\ll \forall i \ 0 \leq i \leq m \ \exists J > 0 \ \exists c_1, \dots, c_J \in \mathbb{C} \ \exists k_1, \dots, k_J \in \mathbb{Z} \text{ tels que } f_0^i = \sum_{j=1}^J c_j (f_0 + i k_j 2\pi)^m \gg$$

La propriété est vraie au rang $m=0$. Supposons la vraie au rang m .

On aura, dans un voisinage connexe U de z_0 convenable :

$$0 \leq i \leq m \quad \forall z \in U \quad \frac{(\ln z)^i}{z} = \sum_{j=1}^J c_j \frac{(\ln z + i k_j 2\pi)^m}{z}$$

En intégrant les fonctions $f_0^i = \frac{(\ln z)^i}{z}$ holomorphes dans U :

$$0 \leq i \leq m \quad \forall z \in U \quad \frac{(\ln z)^{i+1}}{i+1} = \sum_{j=1}^J c_j \frac{(\ln z + i k_j 2\pi)^{m+1}}{m+1} + k e_0$$

(où k est une constante de $\mathbb{C}$)

$$\text{d'où : } 0 \leq i \leq m \quad f_0^{i+1} = \sum_{j=1}^J \frac{c_j(i+1)}{m+1} (f_0 + i k_j 2\pi)^{m+1} + k e_0$$

Il reste à montrer que $f_0^0 = e_0$ s'écrit comme combinaison linéaire des $(f_0 + i k_j 2\pi)^m$ avec des k_j convenables pour conclure.

Cherchons donc les constantes $c_j \in \mathbb{C}$ et $k_j \in \mathbb{Z}$ tels que :

$$e_0 = \sum_{j=1}^J c_j (f_0 + i k_j 2\pi)^m$$

En développant et en retenant que $(e_0, f_0, \dots, f_0^m)$ est une base :

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^J c_j k_j^{m-k} = 0 & 1 \leq k \leq m \\ \sum_{j=1}^J c_j k_j^m = \frac{1}{(i 2\pi)^m} \end{cases}$$

d'où le système :

$$(I) \quad \begin{cases} c_1 + c_2 + \dots + c_J = 0 \\ c_1 k_1 + c_2 k_2 + \dots + c_J k_J = 0 \\ \dots \dots \dots \\ c_1 k_1^{m-1} + c_2 k_2^{m-1} + \dots + c_J k_J^{m-1} = 0 \\ c_1 k_1^m + c_2 k_2^m + \dots + c_J k_J^m = \frac{1}{(i 2\pi)^m} \end{cases}$$

Posons $J = m+1$. Le déterminant de ce système en $(c_1, \dots, c_J)$ est le déterminant de Vandermonde :

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ k_1 & k_2 & \dots & k_J \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ k_1^{m-1} & k_2^{m-1} & \dots & k_J^{m-1} \\ k_1^m & k_2^m & \dots & k_J^m \end{vmatrix} = \prod_{1 \leq i < j \leq m+1} (k_j - k_i)$$

L'expression obtenue dans le membre de gauche est polynomiale en f_0 de degré K , et de terme constant : $c_0 \cdot \prod_{k=1}^K (ik2\pi)$.

D'après l'exemple $n \equiv 2$, $(e_0, f_0, \dots, f_0^K)$ est un système libre de $\mathcal{O}_{Z_0}$, de sorte que : $c_0 = 0$

$$\text{Ainsi : } \frac{c_1}{f_0 + i2\pi} + \dots + \frac{c_K}{f_0 + iK2\pi} = 0$$

En posant $f_1 = f_0 + i2\pi$, et en notant que f_1 est une détermination du logarithme en z_0 , on obtient :

$$\frac{c_1}{f_1} + \dots + \frac{c_K}{f_1 + i(K-1)2\pi} = 0$$

Et d'après l'hypothèse de récurrence : $c_1 = \dots = c_K = 0$.

Ce qui montre la récurrence.

4° Soit $P \in \mathbb{C}[X_1, \dots, X_n]$ un polynôme à n variables.

$\ln(P(z))$ est une fonction analytique multiforme sur $\mathbb{C}^n \setminus P^{-1}(0)$, de détermination finie faible et $H_{\ln P}(z) (z \in \mathbb{C}^n \setminus P^{-1}(0))$ est un espace vectoriel de dimension 2.

c

Fonctions analytiques multiformes à détermination finie

1.26 Lemme

Si $F \in \text{MO}(X)$ est à détermination finie, notons $\beta_{1,x}, \dots, \beta_{m,x}$ les m branches locales de F au point $x \in X$. Soit S un polynôme symétrique à m variables.

La fonction $S(x) \doteq S(\beta_{1,x}(x), \dots, \beta_{m,x}(x))$ est une fonction analytique uniforme définie sur X .

preuve :

Faisons $x_0 \in X$. D'après le lemme 1.22, le germe $S(\beta_{1,x_0}, \dots, \beta_{m,x_0}) \in \mathcal{O}_{x_0}$ se prolonge analytiquement le long de tout chemin γ d'origine x_0 pour donner naissance à une fonction $S \in \text{MO}(X)$, et :

$$(S(\beta_{1,x_0}, \dots, \beta_{m,x_0}))_\gamma = S((\beta_{1,x_0})_\gamma, \dots, (\beta_{m,x_0})_\gamma)$$

Si $x \in X$, toutes les valeurs de S en x sont obtenues en prolongeant le germe $S(\beta_{1,x_0}, \dots, \beta_{m,x_0})$ le long de chemins $\gamma \in \mathcal{T}(x_0, x)$.

L'application $\Psi: S_S(x_0) \rightarrow S_S(x)$ est une bijection d'après la

$$\beta \mapsto (\beta)_\gamma$$

proposition 1.17, de sorte qu'il existe une permutation σ de l'ensemble $\{1, \dots, m\}$ telle que $(\beta_{i,x_0})_\gamma = \beta_{\sigma(i),x}$. L'hypothèse " S est un polynôme symétrique" permet de conclure que S ne possède qu'une seule valeur en x , à savoir :

$$\begin{aligned} S(x) &= S((\beta_{1,x_0})_\gamma(x), \dots, (\beta_{m,x_0})_\gamma(x)) \\ &= S(\beta_{\sigma(1),x}(x), \dots, \beta_{\sigma(m),x}(x)) \\ &= S(\beta_{1,x}(x), \dots, \beta_{m,x}(x)) \end{aligned}$$

CQFD

1.27 lemme

Soient X une variété complexe de dimension n , $x_0 \in X$ fixé, U un voisinage ouvert de x_0 dans X et $s_1, \dots, s_m \in \mathcal{O}(U)$.

On suppose que w_0 est une racine complexe simple du polynôme

$$Y^m + s_1(x_0) Y^{m-1} + \dots + s_m(x_0) \in \mathbb{C}[Y]$$

Il existe un ouvert $V \subset U$ contenant x_0 et une unique fonction φ holomorphe sur V telle que :

$$\begin{cases} \varphi(x_0) = w_0 \\ \varphi^m + s_1 \varphi^{m-1} + \dots + s_m = 0 \quad \text{sur } V \end{cases}$$

preuve :

1) Montrons d'abord le résultat suivant dans $\mathbb{C}$: "Si $s_1, \dots, s_m$ sont m fonctions holomorphes dans le disque $D_R = \{z \in \mathbb{C} / |z| < R\}$ où $R > 0$, et si w_0 est une racine complexe simple du polynôme

$$Y^m + s_1(0) Y^{m-1} + \dots + s_m(0) \in \mathbb{C}[Y]$$

il existe $0 < r \leq R$ et une unique fonction holomorphe φ dans le disque D_r telle que

$$\begin{cases} \varphi(0) = w_0 \\ \varphi^m + s_1 \varphi^{m-1} + \dots + s_m = 0 \quad \text{sur } D_r. \end{cases}$$

$$\forall z \in D_R \quad \forall w \in \mathbb{C} \quad F(z, w) = w^m + s_1(z) w^{m-1} + \dots + s_m(z)$$

Il existe $\varepsilon > 0$ tel que la fonction $w \mapsto F(0, w)$ admette l'unique zéro w_0 dans $|w - w_0| \leq \varepsilon$. F est continue, donc il existe $r \in]0, R]$ tel que la fonction F n'admette pas de zéros dans l'ensemble

$$\{(z, w) \in \mathbb{C}^2 / z \in D_r \text{ et } |w - w_0| = \varepsilon\}$$

[Montrons ce dernier point : $F(0, w) \neq 0 \quad \forall w / |w - w_0| = \varepsilon$ et la continuité de F donne : $\exists r_w > 0 \exists \eta_w > 0 \quad |z| < r_w \text{ et } |w' - w| < \eta_w \Rightarrow |F(z, w')| > \frac{|F(0, w)|}{2}$
 $\geq \inf_{|w - w_0| = \varepsilon} \frac{|F(0, w)|}{2} \doteq \delta > 0$. $\delta > 0$ car l'image du compact $\{0\} \times \{w / |w - w_0| = \varepsilon\}$ par l'application continue $w \mapsto \frac{|F(0, w)|}{2}$ est un compact de $\mathbb{R}_+^*$. $|w - w_0| = \varepsilon$ est un compact recouvert par les boules de centre w et de rayon η_w . Donc :

$$\{w / |w - w_0| < \varepsilon\} \subset \bigcup_{i=1}^k B(w_i, \eta_{w_i}). \text{ On pose } r = \inf_{1 \leq i \leq k} r_{w_i}, \text{ et on a bien :}$$

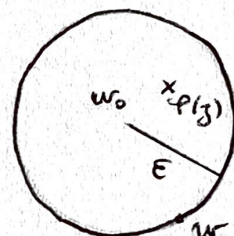
$$\forall w \in \{w / |w - w_0| = \varepsilon\} \quad \exists i \in [1, k] / w \in B(w_i, \eta_{w_i}) \text{ et si } |z| < r < r_{w_i} \quad |F(z, w)| > \delta > 0]$$

$$\forall z \in D_1 \quad n(z) = \frac{1}{i2\pi} \int_{|w-w_0|=\varepsilon} \frac{\frac{\partial F}{\partial w}(z,w)}{F(z,w)} dw \quad \text{car représente le nombre de zéros}$$

de la fonction $w \mapsto F(z,w)$ dans le disque $|w-w_0| \leq \varepsilon$ comptés avec multiplicité. Comme $n(0)=1$ et comme $n(z)$ est continue en z , on a $n(z)=1 \quad \forall z \in D_1$.

Notons $\varphi(z)$ l'unique racine de $w \mapsto F(z,w)$ située dans $|w-w_0| \leq \varepsilon$. Le théorème des résidus montre que :

$$\varphi(z) = \frac{1}{i2\pi} \int_{|w-w_0|=\varepsilon} w \cdot \frac{\frac{\partial F}{\partial w}(z,w)}{F(z,w)} dw$$



La fonction $\varphi(z)$ est donc holomorphe dans D_1 puisque l'intégrant $z \mapsto w \frac{\frac{\partial F}{\partial w}(z,w)}{F(z,w)}$ est holomorphe dans D_1 (cf. théorème de Lebesgue).

Il est clair que $F(z, \varphi(z)) = 0$ pour tout $z \in D_1$.

2) La démonstration précédente est encore valable si nous faisons varier z dans $\mathbb{C}^n$ au lieu de $\mathbb{C}$.

3) Dans le cas général où X est une variété analytique complexe de dimension n sur $\mathbb{C}$, prenons une carte (U, β) en x_0 de telle sorte que :

$$\beta(U) = D_R \quad \text{et} \quad s_1, \dots, s_m \in \mathcal{O}(U)$$

Les fonctions $S_i = s_i \circ \beta^{-1} : D_R \rightarrow \mathbb{C}$ sont holomorphes, et le 2) montre l'existence de $r \in]0, R]$ et de $\Xi \in \mathcal{O}(D_r)$ tels que :

$$\begin{cases} \Xi(0) = w_0 \\ \Xi^n + S_1 \Xi^{n-1} + \dots + S_m \Xi = 0 \quad \text{dans } D_r \end{cases}$$

Il suffit de poser $\varphi = \Xi \circ \beta : \beta^{-1}(D_r) \rightarrow \mathbb{C}$ pour obtenir l'ouvert $V = \beta^{-1}(D_r)$ et $\varphi \in \mathcal{O}(V)$ vérifiant les conclusions du lemme 1.27.

CQFD

1.28 Proposition :

Soit $F \in \mathcal{M}(X)$,

(1) Si F est à détermination finie, il existe m fonctions analytiques $s_1, \dots, s_m \in \mathcal{O}(X)$ telles que $F^m + s_1 F^{m-1} + \dots + s_m = 0$

(2) Inversement, s'il existe m fonctions analytiques $s_1, \dots, s_m \in \mathcal{O}(X)$ telles que $F^m + s_1 F^{m-1} + \dots + s_m = 0$ et si pour tout $x \in X$ le polynôme $Y^m + s_1(x) Y^{m-1} + \dots + s_m(x)$ admet m racines complexes distinctes, alors F est à détermination finie.

preuve :

Notons bien que l'égalité $F^m + s_1 F^{m-1} + \dots + s_m = 0$ signifie que :

$$\forall x \in X \quad \forall f \in S_F(x) \quad f^m + s_1 f^{m-1} + \dots + s_m = 0 \quad \text{dans } \mathcal{O}_x.$$

(1) Notons $\beta_{1,x}, \dots, \beta_{m,x}$ les m branches locales de F en x et développons le produit :

$$\prod_{i=1}^m (Y - \beta_{i,x}(x)) = Y^m + s_1(x) Y^{m-1} + \dots + s_m(x)$$

Les fonctions symétriques élémentaires $s_1, \dots, s_m$ appartiennent à $\mathcal{O}(X)$ d'après le lemme 1.26 et $F^m + s_1 F^{m-1} + \dots + s_m = 0$ par construction.

(2) Soit $x \in X$ fixé.

$$\forall f \in S_F(x) \quad f^m + s_1 f^{m-1} + \dots + s_m = 0 \quad \text{dans } \mathcal{O}_x$$

En particulier, $\beta(x)$ est l'une des m racines distinctes de l'équation :

$$Y^m + s_1(x) Y^{m-1} + \dots + s_m(x) = 0$$

racine que nous noterons w_0 .

Le lemme 1.27 montre l'existence d'un voisinage V de x et d'une

unique fonction holomorphe φ dans V telle que $\varphi(x) = w_0$ et

$$\varphi^m + s_1 \varphi^{m-1} + \dots + s_m = 0 \quad \text{dans } V. \quad \text{Nécessairement } f = \rho_x(\varphi) \in \mathcal{O}_x \text{ et}$$

F admet donc au plus m branches locales en x .

CQFD

1.29 Proposition:

Soient X une variété analytique complexe connexe de dimension $n \geq 1$ et $Y^m + s_1 Y^{m-1} + \dots + s_m$ un polynôme à coefficients $s_1, \dots, s_m \in \mathcal{O}(X)$. On suppose que toutes les racines de $Y^m + s_1(x) Y^{m-1} + \dots + s_m(x)$ sont simples quand x décrit X , et on considère $x_0 \in X$ et une racine complexe w_0 de l'équation $Y^m + s_1(x_0) Y^{m-1} + \dots + s_m(x_0) = 0$.

(1) Il existe un unique germe de fonction analytique en x_0 noté $f_0 \in \mathcal{O}_{x_0}$ tel que $f_0(x_0) = w_0$ et $f_0^m + s_1 f_0^{m-1} + \dots + s_m = 0$ dans $\mathcal{O}_{x_0}$.

(2) f_0 se prolonge analytiquement le long de tout chemin de X et donne naissance à $F \in \mathcal{H}^0(X)$ qui vérifie l'équation:

$$F^m + s_1 F^{m-1} + \dots + s_m = 0$$

(F est donc à détermination germe d'après 1.28)

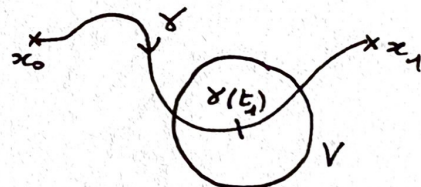
preuve: Le (1) est exactement le lemme 1.27. Soit $\gamma \in \mathcal{C}(x_0, x)$. Il existe une application continue $w : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$ telle que:

$$(1) \begin{cases} w(0) = w_0 \\ w(t) \text{ racine de } Y^m + s_1(\gamma(t)) Y^{m-1} + \dots + s_m(\gamma(t)) = 0 \end{cases}$$

Pour le voir, considérons $T = \{t \in [0, 1] \mid \exists w : [0, t] \rightarrow \mathbb{C} \text{ vérifiant (1)}\}$. $T \neq \emptyset$ (car $0 \in T$) et T est ouvert d'après le lemme 1.27. Si $T = [0, t_1[$ où $t_1 < 1$, on applique le lemme 1.27 au point $\gamma(t_1)$

pour obtenir m fonctions racines $\varphi_j(t)$ vérifiant $\varphi_j^m + s_1 \varphi_j^{m-1} + \dots + s_m = 0$ dans un voisinage V de $\gamma(t_1)$.

Prends $\varepsilon > 0$ tel que $\gamma([t_1 - \varepsilon, t_1 + \varepsilon]) \subset V$. $w(t_1 - \varepsilon)$ est une racine de $Y^m + s_1(\gamma(t_1 - \varepsilon)) Y^{m-1} + \dots + s_m(\gamma(t_1 - \varepsilon))$, donc il existe $j_0 \in [1, m]$ tel que $w(t_1 - \varepsilon) = \varphi_{j_0}(t_1 - \varepsilon)$ et il est clair que l'on prolonge continuellement w à $[0, t_1 + \varepsilon]$ en posant $w(t) = \varphi_{j_0}(t)$ pour $t_1 - \varepsilon \leq t \leq t_1 + \varepsilon$, ce qui est absurde. Donc $T = [0, 1]$.



Cela étant, le lemme 1.27 montre l'existence d'une application holomorphe φ_t sur un voisinage V_t de $\gamma(t)$ et telle que:

$$\forall t \in [0, 1] \quad \begin{cases} \varphi_t(\gamma(t)) = w(t) \\ \varphi_t^m + s_1 \varphi_t^{m-1} + \dots + s_m = 0 \text{ sur } V_t \end{cases}$$

Il ne reste plus qu'à appliquer la définition 1.2 avec la famille de germes $\varphi_t = \rho_{\gamma(t)}(\varphi_t) \in \mathcal{O}_{\gamma(t)}$ et les fonctions $\varphi_t \in \mathcal{O}(V_t)$. CQFD

D

Transformation de monodromie

1.30 Proposition :

Soient $F \in \mathcal{M}_0(X)$, $\gamma \in \pi_1(X)$ et γ un représentant de γ dans $\mathcal{C}(x)$.

L'application $\Psi: S_F(x) \rightarrow S_F(x): \beta \mapsto (\beta)_\gamma$ se prolonge de manière unique en un automorphisme T_γ de $H_F(x)$ et l'application :

$$\begin{array}{ccc} \pi_1(X) & \longrightarrow & GL(H_F(x)) \\ \gamma & \longmapsto & T_\gamma \end{array}$$

est un homomorphisme de groupes, i.e. :

$$\forall \gamma_1, \gamma_2 \in \pi_1(X) \quad T_{\gamma_2} \circ T_{\gamma_1} = T_{\gamma_2 \circ \gamma_1}$$

preuve: $(\beta)_\gamma$ ne dépend que de la classe d'homotopie γ de γ d'après le Théorème de monodromie 1.13. On peut donc poser $T_\gamma(\beta) = (\beta)_\gamma$. T_γ est alors une bijection de $S_F(x)$ dans $S_F(x)$ d'après 1.17, et :

$$\begin{cases} T_{\{x\}} = \text{id}_{S_F(x)} \\ \forall \gamma_1, \gamma_2 \in \pi_1(X) \quad T_{\gamma_2} \circ T_{\gamma_1} = T_{\gamma_2 \circ \gamma_1} \end{cases}$$

Prolongeons T_γ à tout $H_F(x)$ comme dans la démonstration 1.23 de façon à obtenir une application $\mathbb{C}$ -linéaire bijective :

$$\begin{array}{ccc} T_\gamma : H_F(x) & \longrightarrow & H_F(x) \\ \sum_{i \in I} c_i \beta_i & \longmapsto & \sum_{i \in I} c_i (\beta_i)_\gamma \quad (\text{où } \{\gamma\} = \gamma) \end{array}$$

$\{\beta_i\}_{i \in I}$ désignant une base de $H_F(x)$ incluse dans $S_F(x)$.

$T_\gamma \in \mathcal{L}(H_F(x))$ prolonge bien $T_\gamma: S_F(x) \rightarrow S_F(x)$ puisque pour tout $\beta \in S_F(x)$, $\beta = \sum_{i \in I} c_i \beta_i$ on a $(\beta)_\gamma = \sum_{i \in I} c_i (\beta_i)_\gamma$ d'après le lemme 1.22.

C.Q.F.D

Fixons $x \in X$. A chaque $\gamma \in \pi_1(X)$ on fait correspondre une bijection linéaire $T_\gamma \in GL(H_F(x))$; ainsi les valeurs propres de T_γ ne sont pas nulles.

1.31 Définition : On dit qu'un opérateur T est quasi-unipotent si toutes ses valeurs propres sont des racines complexes de l'unité.

1.32 Proposition : Soit $T: H \rightarrow H$ un opérateur d'un espace vectoriel de dimension finie sur $\mathbb{C}$. T est quasi-unipotent ssi il existe un entier $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $T^k - I$ soit nilpotent.

preuve: Notons $\lambda_i = e^{i2\pi q_i}$, $1 \leq i \leq l$, les valeurs propres de l'opérateur quasi-unipotent T . On a $q_i \in \mathbb{Q}$.

Il existe une base de H où la matrice de T est constituée de blocs de Jordan situés sur la diagonale principale, et de zéros ailleurs (cf. décomposition de Jordan)

Notons $T = \begin{pmatrix} T_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & T_\ell \end{pmatrix}$ où $T_i = \begin{pmatrix} \lambda_i & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ 0 & & 1 & \\ & & & \lambda_i \end{pmatrix}$ représente

une matrice carrée pour tout i .

Il existe $k_i \geq 1$ tel que $\lambda_i^{k_i} = 1$, de sorte que :

$T_i^{k_i} = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & \ddots & & \\ 0 & & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix}$ soit une matrice triangulaire supérieure dont tous

les termes de la diagonale principale sont 1.

En fait, nous avons l matrices carrées T_i . Il nous faut donc prendre $k = k_1 \dots k_\ell$ pour que T_i^k soit une matrice triangulaire supérieure dont les termes de la diagonale principale sont tous égaux à 1, pour tout i .

Le produit de matrices s'effectuant par blocs, on obtient :

$$T^k = \begin{pmatrix} T_1^k & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & T_\ell^k \end{pmatrix}$$

Connaissant la forme des T_i^k , on constate que T^k est une matrice triangulaire supérieure dont tous les éléments de la diagonale principale sont égaux à 1.

Mais alors $T^k - I$ est une matrice triangulaire supérieure de diagonale principale nulle, donc nilpotente.

En notant n la dimension de H , on est sûr d'avoir $(T^k - I)^n = 0$.

Inversement, s'il existe $k \geq 1$ tel que $T^k - I$ soit nilpotent, alors il existe $m \geq 1$ tel que $(T^k - I)^m = 0$. T annule donc le polynôme $(X^k - 1)^m$, et les racines de ce polynôme dans $\mathbb{C}$ sont les racines k -ièmes de l'unité; les valeurs propres de T font partie de ces racines et sont donc de module 1.

CQFD

Remarque: On a montré la proposition 1.32 dans le seul cas où T est une matrice constituée de blocs de Jordan. Le cas général provient des 3 résultats suivants:

- 1) Si T est une matrice carrée à coefficients complexes, il existe toujours une matrice inversible P telle que $J = P^{-1}TP$ soit constituée de blocs de Jordan (Réduction de Jordan)
- 2) Si $J = P^{-1}TP$, les valeurs propres de J coïncident avec celles de T et donc: J quasi-unipotente $\Leftrightarrow T$ quasi-unipotente.
- 3) $T^k - I$ nilpotent ssi $J^k - I$ nilpotent.

1.33 Définition:

L'indice de nilpotence d'un opérateur T quasi-unipotent est l'entier $m = \inf \{ d \in \mathbb{N} / \exists k \in \mathbb{N}^* (T^k - I)^d = 0 \}$.

On pose $P_m(X) = \{ f \in H^0(X) / \forall x_0 \in X \setminus V(f) \quad \forall \gamma \in \mathcal{C}(x_0) \quad \forall f_0 \in S_f(x_0) \quad \exists k \in \mathbb{N}^* (T^k - I)^m f_0 = 0 \}$

(où $V(f)$ désigne l'ensemble algébrique en dehors duquel f est définie)

Si $f \in P_m(X)$, on dit que la monodromie de f est quasi-unipotente d'indice de nilpotence $\leq m$.

On a $P_{m-1}(X) \subset P_m(X)$ et si $f \in P_m(X) \setminus P_{m-1}(X)$, f est dite quasi-unipotente d'indice de nilpotence égal à m .

1.34. Cas où F est à détermination finie

Si $F \in MO(X)$ est à détermination finie, $\text{ind}(F)=1$. En effet si $\xi \in \pi_1(X)$ T_ξ est une application bijective de l'ensemble fini $S_F(x)$ sur lui-même et si $S_F(x)$ possède k éléments $T_\xi^{k!}$ est l'application identique de $S_F(x)$. En passant à l'espace vectoriel $H_F(x)$, on constate que $T_\xi^{k!} - I = 0$ donc $\text{ind}(F)=1$

1.35. Exemples

- * z^α est une fonction analytique multiforme de $\mathbb{C} - \{0\}$ ou $\alpha \in \mathbb{C}$ et $\pi_1(\mathbb{C} - \{0\}) \cong \mathbb{Z}$. Un générateur du groupe fondamental $\pi_1(\mathbb{C} - \{0\})$ est un chemin fermé d'indice 1 relativement à 0. On a $T_\xi(z^\alpha) = z^\alpha e^{2\pi i \alpha}$ de sorte que T_ξ est quasi-unipotent si $\alpha \in \mathbb{Q}$
- * si $F = (\log z)^m$ ou $m \geq 1$ alors F est quasi-unipotente d'indice de nilpotence égal à $m+1$. Prenons le cas particulier où $F(z) = (\log z)^2$ et posons : $f_0 = \log z \in G_1$ (f_0 est donc une détermination du logarithme en $z=1$)
Nous avons :

$$T_{e_0} = e_0 \quad \text{où } e_0 = 1 \in G_1$$

$$T_{f_0} = f_0 + 2i\pi e_0$$

$$T_{f_0^2} = (\log z + 2i\pi)^2 = f_0^2 + i4\pi f_0 - 4\pi^2$$

On sait que (e_0, f_0, f_0^2) est une base de l'espace vectoriel $H_F(1)$.
La matrice de monodromie T de F est dans cette base :

$$T = \begin{pmatrix} 1 & i2\pi & -4\pi^2 \\ 0 & 1 & i4\pi \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

on vérifie que $(T - I)^3 = 0$ que $(T - I)^j \neq 0$ avec $j=1,2$. Donc $\text{ind}(F) = \dim H_F(1) = 3$

E

Fonctions analytiques multiformes à détermination finie faible

1.36 Théorème

Toute fonction analytique multiforme à détermination finie faible sur le disque épointé $D^* = \{z \in \mathbb{C} / 0 < |z| < 1\}$ est de la forme :

$$F(z) = \sum_{i \in I} z^{\sigma_i} P_i(\ln z)$$

où I est un ensemble fini d'indices, où $\sigma_i \in \mathbb{C}$ et où P_i est un polynôme à coefficients dans $\mathcal{O}(D^*)$.

Remarques :

Tous les nombres complexes σ_i intervenant dans cette proposition décrivent l'ensemble des $\sigma \in \mathbb{C}$ tels qu'il existe une valeur propre de la matrice de monodromie de F égale à $e^{i2\pi\sigma}$. Ainsi $\sigma_i \in \mathbb{Q}$ dès que F est quasi-unipotente.

Les degrés des polynômes P_i sont strictement inférieurs à la longueur maximale des blocs de Jordan de la décomposition de Jordan de la matrice de monodromie de F , de sorte que l'on ait à fortiori $\deg P_i \leq \dim H_F(x) - 1$.

Si F est à détermination finie faible et à croissance tempérée sur D^* (dans un sens précisé au §2.5), alors les coefficients des polynômes P_i s'étendent en fonctions méromorphes sur le disque D en entier.

Enfin, une généralisation dans le cas à n variables est donnée à la section 1.37

preuve du Théorème 1.36 :

Choisissons une base de $H_F(z_0)$ où la matrice T de la transformation de monodromie de F est décrite sous la forme canonique de Jordan. $H_F(z_0)$ est alors somme directe de sous-espaces invariants

de T . Plaçons nous dans un tel sous-espace W et notons $(E_1, \dots, E_m)$ une base de W vérifiant :

$$\begin{cases} TE_1 = \alpha E_1 \\ TE_j = \alpha E_j + E_{j-1} & 2 \leq j \leq m \end{cases}$$

Comme $\alpha \in \mathbb{C}^*$, il existe $\sigma \in \mathbb{C}$ tel que $\alpha = e^{i2\pi\sigma}$. Posons

$g_j = z^{-\sigma} E_j$ pour $1 \leq j \leq m$, de sorte que l'on ait :

$$\begin{cases} Tg_1 = g_1 \\ Tg_j = g_j + \alpha^{-1} g_{j-1} & 2 \leq j \leq m \end{cases}$$

L'égalité $Tg_1 = g_1$ signifie que g est une fonction holomorphe sur D^* .

Posons $h_2 = g_2 - \beta g_1 \ln z$ et déterminons $\beta \in \mathbb{C}$ tel que $Th_2 = h_2$.

$$\begin{aligned} \text{On a : } Th_2 &= Tg_2 - \beta Tg_1 \cdot (\ln z + i2\pi) \\ &= h_2 + (\alpha^{-1} - i2\pi\beta) g_1 \end{aligned}$$

Il suffit de prendre $\beta = \frac{1}{i2\pi\alpha}$ pour avoir $Th_2 = h_2$.

Posons $h_3 = g_3 - \beta g_2 \ln z + A g_1 (\ln z)^2 + B g_1 \ln z$ et déterminons les constantes A et B de sorte que $Th_3 = h_3$.

$$\begin{aligned} Th_3 &= g_3 + \alpha^{-1} g_2 - \beta (g_2 + \alpha^{-1} g_1) (\ln z + i2\pi) + A g_1 (\ln z + i2\pi)^2 \\ &\quad + B g_1 (\ln z + i2\pi). \end{aligned}$$

$$Th_3 = h_3 + (4i\pi A - \alpha^{-1}\beta) g_1 \ln z + (2i\pi B - 4\pi^2 A - \alpha^{-2}) g_1$$

Il suffit de prendre $A = -\frac{1}{8\pi^2\alpha^2}$ et $B = \frac{\alpha^{-2}}{4i\pi}$ pour avoir $Th_3 = h_3$.

On continue par récurrence en posant :

$$h_j = g_j - \beta g_{j-1} \ln z + g_{j-2} Q_{j,2}(\ln z) + \dots + g_1 Q_{j,j-1}(\ln z) \quad (1)$$

$$\text{où } Q_{j,v}(\ln z) = c_{j,v,v}(\ln z)^v + \dots + c_{j,v,0} \quad (2 \leq v \leq j-1)$$

Il s'agit de déterminer les coefficients des polynômes $Q_{j,v}$ de façon à avoir $Th_j = h_j$. Montrons que cela est possible :

$$\begin{aligned} Th_j &= g_j + \alpha^{-1} g_{j-1} - \beta (g_{j-1} + \alpha^{-1} g_{j-2}) (\ln z + i2\pi) + (g_{j-2} + \alpha^{-1} g_{j-3}) Q_{j,2}(\ln z + i2\pi) \\ &\quad + \dots + g_1 Q_{j,j-1}(\ln z + i2\pi) \end{aligned}$$

$$Th_j = h_j + \underbrace{(\alpha^{-1} - \beta i 2\pi)}_{=0} g_{j-1} + \underbrace{(\alpha^{-1} + c_{j,2,2} i 4\pi)}_{=0} g_{j-2} \ln z + \underbrace{(\alpha^{-1} i 2\pi + c_{j,2,2} (i 2\pi)^2 + c_{j,2,1} i 2\pi)}_{=0} g_{j-2} + \dots$$

$\downarrow$ $(\alpha, \beta \text{ déjà fixés})$ $\downarrow$ $(\text{détermine } c_{j,2,2})$ $\downarrow$ $(\text{détermine } c_{j,2,1})$

On vérifie que l'on peut annuler tous les coefficients des termes en $g_{j-u} (\ln z)^u$ ($0 \leq u \leq v-1$): Soit v fixé, $2 \leq v < j-1$. Les termes en g_{j-u} dans Th_j proviennent du prolongement de $g_{j-u} \Phi_{j,v}(\ln z)$ et $g_{j-u+1} \Phi_{j,v-1}(\ln z)$, ainsi dans $Th_j - h_j$ les termes en g_{j-u} sont contenus dans l'expression:

$$(g_{j-u+1} + \alpha^{-1} g_{j-u}) \Phi_{j,v-1}(\ln z + i 2\pi) + (g_{j-u} + \alpha^{-1} g_{j-u-1}) \Phi_{j,v}(\ln z + i 2\pi) - g_{j-u} \Phi_{j,v}(\ln z)$$

ou encore dans l'expression:

$$(\Phi_{j,v}(\ln z + i 2\pi) - \Phi_{j,v}(\ln z) + \underbrace{\alpha^{-1} \Phi_{j,v-1}(\ln z + i 2\pi)}_{\text{coefficients déjà connus}}) g_{j-u}$$

Le polynôme $\Phi_{j,v-1}$ est connu (par hypothèse de récurrence) puisque déjà construit, α est connu, de sorte que le terme $\alpha^{-1} \Phi_{j,v-1}(\ln z + i 2\pi)$ ne fasse intervenir que des coefficients arbitraires déjà fixés. Or:

$$\begin{aligned} \Phi_{j,v}(\ln z + i 2\pi) - \Phi_{j,v}(\ln z) &= \sum_{v=1}^v c_{j,v,v} ((\ln z + i 2\pi)^v - (\ln z)^v) \\ &= \sum_{v=1}^v c_{j,v,v} \sum_{k=0}^{v-1} C_v^k (i 2\pi)^{v-k} (\ln z)^k \\ &= \sum_{k=0}^{v-1} \left(\underbrace{\sum_{v=k+1}^v c_{j,v,v} C_v^k (i 2\pi)^{v-k}}_{(*)} \right) (\ln z)^k \end{aligned}$$

Le système d'équations (*) en $c_{j,v,v}$ est de Cramer: c'est le système diagonal

$$\begin{cases} c_{j,v,v} = ** & c_{j,v,v} (i 2\pi) \\ c_{j,v,v-1} + c_{j,v,v} C_{v-1}^{v-2} (i 2\pi) = ** & c_{j,v,v-1} \\ \dots & \dots \\ c_{j,v,1} + c_{j,v,2} (i 2\pi) + \dots + c_{j,v,v} (i 2\pi)^{v-1} = ** & \dots \end{cases} \quad \rightarrow$$

où les nombres ** proviennent du développement de $\alpha^{-1} \Phi_{j,v-1}(\ln z + i 2\pi)$

Il est donc possible d'annuler tous les termes en $g_{j-u} (\ln z)^u$ où $0 \leq u \leq v-1$ dans $Th_j - h_j$ pour $2 \leq v \leq j-1$. Si $v = j-1$, les termes en g_u dans $Th_j - h_j$ sont contenus dans l'expression :

$$\alpha^{-1} g_u Q_{j,j-2}(\ln z + i2\pi) + g_u Q_{j,j-1}(\ln z + i2\pi) - g_u Q_{j,j-1}(\ln z)$$

et un calcul identique au précédent permet d'annuler les coefficients des termes en $g_u (\ln z)^u$ où $0 \leq u \leq j-2$.

Finalement, chacune des fonctions $h_1 = g_1, h_2, \dots, h_m$ sont des fonctions holomorphes sur D^* et :

$$(I) \quad \begin{cases} h_1 = g_1 \\ h_2 = g_2 - \beta g_1 \\ \dots \dots \dots \\ h_j = g_j - \beta g_{j-1} \ln z + g_{j-2} Q_{j,2}(\ln z) + \dots + g_1 Q_{j,j-1}(\ln z) \\ \dots \dots \dots \\ h_m = g_m - \beta g_{m-1} \ln z + \dots + g_1 Q_{m,m-1}(\ln z) \end{cases} \quad (1)$$

En résolvant en $g_1, \dots, g_m$ on obtient :

$$g_j = \varphi_j(z) P_j(\ln z) \quad 1 \leq j \leq m$$

où $\varphi_1, \dots, \varphi_m \in \mathcal{O}(D^*)$ et où P_j est un polynôme à coefficients complexes tel que $\deg P_j \leq j-1$ (simple raisonnement par récurrence).

On possède donc une base $\{E_j = z^\sigma \varphi_j(z) P_j(\ln z) / 1 \leq j \leq m\}$ de W et il suffit de recommencer tout ce raisonnement sur chacun des s.e.v. invariants de T pour obtenir le théorème 1.36.

NB: Si F est à croissance tempérée, chacun des vecteurs de base $E_1, \dots, E_m$ est à croissance tempérée donc aussi $g_1, \dots, g_m$ (car z^σ à croissance tempérée). Le système (I) montre de proche en proche que chaque fonction h_j est à croissance tempérée. Il en est donc de même des fonctions $\varphi_1, \dots, \varphi_m$ qui sont polynomiales en $h_1, \dots, h_m$ et $\ln z$ qui est à croissance tempérée.

φ_j ($1 \leq j \leq m$) est donc une fonction analytique sur D^* à croissance tempérée, et la section 2.7 montre que φ_j est méromorphe. Cela prouve une des remarques du théorème 1.36.

1.37 Généralisation du théorème 1.36

Considérons le disque $D = \{z \in \mathbb{C}^n / |z| < 1\}$ et l'hypersurface $p^{-1}(0)$ à croisements normaux définie par le polynôme

$$p(z) = z_1 \cdots z_n \quad (\text{où } 1 \leq n \leq n)$$

Notons $D^* = D \setminus p^{-1}(0)$.

L'énoncé du théorème 1.36 est encore vrai en considérant les n -uplets de complexes $\sigma = (\sigma_1, \dots, \sigma_n)$ et les n -uplets d'entiers naturels $\nu = (\nu_1, \dots, \nu_n)$, et en notant :

$$\begin{cases} z^\sigma = z_1^{\sigma_1} \cdots z_n^{\sigma_n} \\ (\ln z)^\nu = (\ln z_1)^{\nu_1} \cdots (\ln z_n)^{\nu_n} \end{cases}$$

preuve: Le groupe fondamental $\pi_1(D \setminus p^{-1}(0))$ est un groupe abélien libre de rang n . D'ailleurs si $0 < \varepsilon < 1$ et si $z_0 = (\varepsilon, \dots, \varepsilon) \in \mathbb{C}^n$ est fixé, on obtient n générateurs $\{\gamma_1, \dots, \gamma_n\}$ de $\pi_1(D \setminus p^{-1}(0))$ en considérant les lacets γ_j d'origine z_0 définis par $z_j(t) = \varepsilon e^{i2\pi t}$ et $z_i(t) = \varepsilon$ si $i \neq j$. Soit T_j la transformation de monodromie de F le long de γ_j (ie $T_j(\beta) = (\beta)_{\gamma_j}$ pour tout $\beta \in H_F(z_0)$).

$T_1, \dots, T_n$ sont des opérateurs linéaires qui commutent 2 à 2 et qui définissent entièrement la prolongation de F .

On reprend alors la démonstration du théorème 1.36 avec T_1 au lieu de T et z_1 au lieu de z , de façon à obtenir une base de W

$E_j = z_1^{\sigma_j} \varphi_j(z_1) p_j(\ln z_1)$ ($1 \leq j \leq m$) où $\varphi_1, \dots, \varphi_m$ sont des fonctions holomorphes en z_1 .
 (sur les lacets $\{\gamma_1, \dots, \gamma_n\}$ commutent entre eux dans $\pi_1(D \setminus p^{-1}(0))$)

Comme $T_1, \dots, T_n$ commutent, on recommence ce processus et on obtient la généralisation de 1.36.

□□□

2.

CLASSE DE NILSSON

Définitions

Considérons les fonctions analytiques multiformes définies en dehors d'une hypersurface algébrique de $\mathbb{C}^n$. Soit $p(z) \in \mathbb{C}[z_1, \dots, z_n]$ un polynôme et $X = \mathbb{C}^n \setminus p^{-1}(0)$. X est un sous-ensemble ouvert et connexe de $\mathbb{C}^n$ et nous pouvons considérer X comme une variété analytique complexe. Nous allons étudier des conditions de croissance sur les fonctions analytiques multiformes sur X , ce qui n'est pas tout à fait évident puisque les valeurs d'une telle fonction ne sont pas uniques en un point.

Pour dépasser cette difficulté, nous dirons comment choisir certaines branches locales d'une fonction multiforme.

Introduisons le rang d'un chemin γ qui décrira la complexité du chemin γ d'un point de vue homotopique :

2.1 Définition :

Un chemin polygonal Γ de $X = \mathbb{C}^n \setminus p^{-1}(0)$ est un chemin de X tel qu'il existe une subdivision $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_N = 1$ de $[0, 1]$ et des points $z_0, \dots, z_N$ de X tels que :

$$\Gamma(t) = \frac{(t_{i+1} - t)z_i + (t - t_i)z_{i+1}}{t_{i+1} - t_i} \quad \text{pour } t_i \leq t \leq t_{i+1}$$

Les points $z_0, \dots, z_N$ sont appelés les sommets du chemin polygonal Γ et N s'appelle le rang de Γ . On note $N = L(\Gamma)$.

X est un ouvert de $\mathbb{C}^n$ et le lemme 1.3 montre que tout chemin γ de X est homotope à un chemin polygonal. On peut donc donner la définition suivante :

2.2 Définition :

Si γ est un chemin de X , on appelle rang de γ et on note $L(\gamma)$ le minimum des rangs des chemins polygonaux homotopes (à extrémités fixes) à γ .

2.3 Propriété évidente :

Si $\gamma \in \mathcal{C}(x_0, x_1)$ et $\mu \in \mathcal{C}(x_1, x_2)$ alors $L(\mu \circ \gamma) \leq L(\mu) + L(\gamma)$

2.4 Définition :

Soient $\rho : X \rightarrow \mathbb{R}_+$ une fonction à valeurs dans $\mathbb{R}_+$ et $F \in \mathcal{MO}(X)$ une fonction analytique multiforme. On dit que F est "localement bornée sous ρ " si pour tout point $x_0 \in X$ et pour toute branche locale $f_0 \in S_F(x_0)$ il existe une suite de nombres réels positifs $C_1, C_2, \dots$ telle que :

$$|(f_0)_\gamma(x)| \leq C_{L(\gamma)} \rho(x) \quad \forall \gamma \in \mathcal{C}(x_0, x)$$

où $(f_0)_\gamma$ désigne le germe induit en $\gamma(1) = x$ par le prolongement analytique de f_0 le long de γ .

Remarques :

1) On peut supposer la suite $C_1, C_2, \dots$ croissante.
 2) Si F est localement bornée sous ρ , et si $m \in \mathbb{N}$, nous pourrions ne considérer que les chemins γ tels que $L(\gamma) \leq m$, de sorte que l'on ait : $|(f_0)_\gamma(x)| \leq C'_m \rho(x)$ où $C'_m = \sup(C_1, \dots, C_m)$

3) Si la propriété précédente est vraie en un seul point x_0 fixé, et pour un germe $f_0 \in S_F(x_0)$ fixé, elle sera vraie pour tous les points $x_1 \in X$.

En effet, si $x_1 \in X$ et si $f_1 \in S_F(x_1)$ il existe une courbe $\delta \in \mathcal{C}(x_0, x_1)$ telle que $f_1 = (f_0)_\delta$.

Pour tous les chemins $\gamma \in \mathcal{C}(x_1, x)$: $(f_1)_\gamma(x) = (f_0)_{\gamma \circ \delta}(x)$
 de sorte que : $|(f_1)_\gamma(x)| \leq C_{L(\gamma \circ \delta)} \rho(x) \quad \forall \gamma \in \mathcal{C}(x_1, x)$
 Supposons que la suite $C_1, C_2, \dots$ soit croissante. On aura compte tenu de la propriété 2.3 :

$$|(f_1)_\gamma(x)| \leq C_{L(\gamma) + L(\delta)} \cdot \rho(x)$$

En posant $K_i = C_{i+L(\delta)}$, on obtient bien :

$$|(f_1)_\gamma(x)| \leq K_{L(\gamma)} \cdot \rho(x) \quad \forall \gamma \in \mathcal{C}(x_1, x)$$

Cette dernière remarque prouve que, pour montrer que F est localement bornée sous ρ , il suffit de se placer en un point $x_0 \in X$ et de vérifier que la condition de la définition est satisfaite avec un germe fixé $f_0 \in S_F(x_0)$. Pour $z \in \mathbb{C}^n$, notons $|z| = \sqrt{\sum |z_i|^2}$.

2.5 Définition (condition de croissance tempérée)

Une fonction analytique multiforme vérifie la condition de croissance tempérée s'il existe deux entiers naturels m et w tels que cette fonction $F \in H_0(\mathbb{C}^n \setminus p^{-1}(0))$ soit localement bornée sous $\rho_{m,w}$, où $\rho_{m,w}(z) = \frac{(1+|z|)^m}{|p(z)|^w}$.

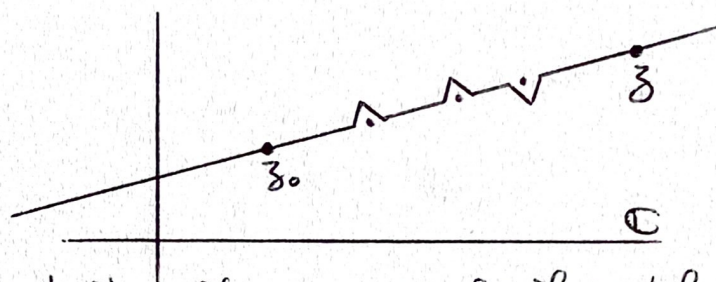
2.6 Cas où F est à détermination finie

Si $F \in H_0(\mathbb{C}^n \setminus p^{-1}(0))$ est à détermination finie et à croissance tempérée, il existe deux entiers m et w et une constante $C > 0$ tels que :

$$\forall z \in \mathbb{C}^n \setminus p^{-1}(0) \quad |F(z)| \leq C \frac{(1+|z|)^m}{|p(z)|^w} \quad (1)$$

preuve : Cela provient du fait que si $z_0 \in \mathbb{C}^n \setminus p^{-1}(0)$ est fixé, tout complexe z de $\mathbb{C}^n \setminus p^{-1}(0)$ peut être joint à z_0 par un chemin polygonal γ situé en dehors de l'hypersurface $p^{-1}(0)$ et de rang $L(\gamma) \leq 3 \deg p + 1$.

En effet : si $n=1$ on considère la droite réelle $\{z_0 + \lambda(z-z_0) / \lambda \in \mathbb{R}\}$ passant par z_0 et z . Il y a au



plus de $\deg p$ points de $p^{-1}(0)$ sur cette droite. Nous pouvons facilement les éviter en ajoutant chaque fois 2 petits segments à notre segment initial $[z_0, z]$. En notant γ le chemin polygonal ainsi obtenu, il est clair que $L(\gamma) \leq 3 \deg p + 1$.

Si $n > 1$, on considère la droite complexe $C = \{z_0 + \lambda(z-z_0) / \lambda \in \mathbb{C}\}$ passant par z_0 et z . C coupe $p^{-1}(0)$ en au plus $\deg p$ points puisque $p(z_0 + \lambda(z-z_0))$ est un polynôme de degré $\deg p$ en λ . Comme $C \simeq \mathbb{C}$, on peut appliquer le cas $n=1$.

Cette remarque étant faite, si β_{1,z_0} est une branche locale de F en z_0 , il existe une suite croissante de constantes $C_1, \dots, C_n, \dots$ vérifiant :

$$\forall z \in \mathbb{C}^n \setminus p^{-1}(0) \quad |(b_{1,z_0})_\gamma(z)| \leq C_{L(\gamma)} \frac{(1+|z|)^m}{|p(z)|^w}$$

Si $z \in \mathbb{C}^n \setminus p^{-1}(0)$, prenons un chemin γ joignant z_0 à z et de rang $L(\gamma) \leq 3 \deg p + 1$, inclus dans $\mathbb{C}^n \setminus p^{-1}(0)$. En posant $K_1 = C_{3 \deg p + 1}$ on a :

$$\forall z \in \mathbb{C}^n \setminus p^{-1}(0) \quad |(b_{1,z_0})_\gamma(z)| \leq K_1 \frac{(1+|z|)^m}{|p(z)|^w}$$

On obtient les constantes K_i ($1 \leq i \leq d$) de la même façon en prenant les d branches locales β_{i,z_0} de F en z_0 .

Prenons $K = \sup(K_1, \dots, K_d)$. L'application de $S_F(z_0)$ dans

$S_F(z) = \{b_{1,z}, \dots, b_{d,z}\}$ qui à β associe $(\beta)_\gamma$ est bijective de sorte que toutes les branches $b_{1,z}, \dots, b_{d,z}$ soient atteintes lorsque β décrit l'ensemble $S_F(z_0) = \{b_{1,z_0}, \dots, b_{d,z_0}\}$.

$$\text{Ainsi : } \forall z \in \mathbb{C}^n \setminus p^{-1}(0) \quad \forall \beta \in S_F(z) \quad |\beta(z)| \leq K \frac{(1+|z|)^m}{|p(z)|^w}$$

ce qui prouve (4).

2.7 Cas particulier :

Si F est une fonction analytique uniforme sur $\mathbb{C}^n \setminus p^{-1}(0)$ qui vérifie la condition de croissance tempérée, l'inégalité (1) montre que la fonction $g = p^w \cdot F$ analytique sur $\mathbb{C}^n \setminus p^{-1}(0)$ vérifie $|g(z)| \leq C(1+|z|)^m$ et se trouve donc localement bornée sur $\mathbb{C}^n$.

D'après le théorème d'extension de Riemann, g se prolonge en une fonction entière dans $\mathbb{C}^n$, et le théorème de Liouville dans $\mathbb{C}^n$ montre que g est un polynôme de degré total $\leq m$. De sorte que $F = \frac{g}{p^w}$ soit une fonction rationnelle.

2.8 Définition de la classe de Nilsson

On appelle classe de Nilsson sur $\mathbb{C}^n \setminus p^{-1}(0)$ et l'on note $\mathcal{N}(\mathbb{C}^n \setminus p^{-1}(0))$ l'ensemble des fonctions analytiques multiformes F définies sur $\mathbb{C}^n \setminus p^{-1}(0)$ et vérifiant les 2 conditions :

- (1) F est de détermination finie faible.
- (2) F est à croissance tempérée.

L'ensemble $\mathcal{N} = \bigcup_P \mathcal{N}(\mathbb{C}^n \setminus p^{-1}(0))$ s'appelle la classe de Nilsson sur $\mathbb{C}^n$.

Introduisons maintenant un sous-ensemble important de la classe de Nilsson, à savoir la classe des fonctions algébriques définies sur $\mathbb{C}^n$:

Fonctions algébriques

2.9 Définition

Soit $p(z)$ un polynôme à n variables à coefficients dans $\mathbb{C}$. On appelle ensemble des fonctions algébriques sur $\mathbb{C}^n \setminus p^{-1}(0)$ et l'on note $\mathcal{A}(\mathbb{C}^n \setminus p^{-1}(0))$ l'ensemble des fonctions analytiques multiformes F définies sur $\mathbb{C}^n \setminus p^{-1}(0)$ et vérifiant les 2 conditions :

- (1) F est à détermination finie.
- (2) F est à croissance tempérée.

L'ensemble $\mathcal{A} = \bigcup \mathcal{A}(\mathbb{C}^n \setminus p^{-1}(0))$ s'appelle l'ensemble des fonctions algébriques de $\mathbb{C}^n$.

2.10 Proposition

Soit $F \in \mathcal{H}(\mathbb{C}^n \setminus p^{-1}(0))$. F est une fonction algébrique sur $\mathbb{C}^n \setminus p^{-1}(0)$ si et seulement si il existe m fractions rationnelles $s_j = \frac{A_j}{p^{v_j}}$ ($1 \leq j \leq m$) (où A_j est un polynôme à n variables et $v_j \in \mathbb{N}$) telles que :

$$F^m + s_1 F^{m-1} + \dots + s_m = 0,$$

le polynôme $Y^m + s_1(x) Y^{m-1} + \dots + s_m(x)$ n'ayant que des racines simples pour tout $x \in \mathbb{C}^n \setminus p^{-1}(0)$.

preuve :

* Soit $F \in \mathcal{A}(\mathbb{C}^n \setminus p^{-1}(0))$, F est à détermination finie et la proposition 1.28 montre l'existence de $s_1, \dots, s_m$ éléments de $\mathcal{O}(\mathbb{C}^n \setminus p^{-1}(0))$ telles que :

$$F^m + s_1 F^{m-1} + \dots + s_m = 0$$

chaque fonction holomorphe s_j ($1 \leq j \leq m$) est une expression polynomiale symétrique des branches $F_{1,z}, \dots, F_{m,z}$ de F au point z : $s_j(z) = s_j(F_{1,z}(z), \dots, F_{m,z}(z))$.
La section 2.6 montre que chaque branche $F_{i,z}$ vérifie une inégalité du type :

$$|F_{i,z}(z)| \leq C \frac{(1+|z|)^{m'}}{|p(z)|^w}$$

par suite chaque s_j ($1 \leq j \leq m$) est à croissance tempérée, la section 2.7 montre alors que :

$$s_j = \frac{A_j}{p^{v_j}} \quad \text{où } A_j \text{ est un polynôme et } v_j \in \mathbb{N}$$

* réciproquement, supposons que $s_j = \frac{A_j}{p^{v_j}}$ où A_j est un polynôme et $v_j \in \mathbb{N}$ pour tout $1 \leq j \leq m$. On a :

$$\forall f \in S_F(z) \quad f^m(z) + s_1(z) f^{m-1}(z) + \dots + s_m(z) = 0$$

$$\text{d'où la majoration : } |f(z)| \leq \sup \left(1, \sum_{j=1}^m |s_j(z)| \right)$$

en effet si $|f(z)| > 1$ on a $f(z) + s_1(z) + \dots + \frac{s_m(z)}{f^{m-1}(z)} = 0$ d'où

$$|f(z)| \leq \sum_{j=1}^m \left| \frac{s_j(z)}{f^{m-1}(z)} \right| \leq \sum_{j=1}^m |s_j(z)|$$

comme $s_j = \frac{A_j}{p^{v_j}}$ il existe $m' \in \mathbb{N}$ et $w = \sup v_j \in \mathbb{N}$ ainsi qu'une constante positive K

tel que pour tout $z \in \mathbb{C} \setminus p^{-1}(0)$: $\sup \left(1, \sum_{j=1}^m |s_j(z)| \right) \leq K \frac{(1+|z|)^m}{|p(z)|^w}$ C.Q.F.D.

Remarque.

La proposition précédente se traduit en algèbre en disant que F est un élément algébrique sur $\mathbb{C}(x)$. Plus généralement dans [LANG] et, de façon plus détaillée, dans [CHE] on considère une extension de degré de transcendance 1 du corps $\mathbb{C}$ et on montre que les éléments de cette extension s'identifient aux fonctions holomorphes sur l'ensemble des anneaux de valuation discrète de $\mathbb{C}$ qui est muni d'une structure de variété analytique compacte complexe de dimension 1

Dans le but d'étudier les zéros de fonctions algébriques nous établissons ici la proposition suivante :

2.11 Proposition

Il existe une bijection entre l'ensemble des fonctions algébriques sur $\mathbb{C}$ et l'ensemble des polynômes irréductibles de $\mathbb{C}[Y, x]$.

preuve :

Si $F \in \mathcal{A}(\mathbb{C} \setminus p^{-1}(0))$ où p désigne un polynôme de $\mathbb{C}[X]$ dont toutes les racines sont simples, notons $f_{1,x}, \dots, f_{m,x}$ les m branches locales de F en x . En développant le produit $\prod_{i=1}^m (Y - f_{i,x}(x))$ on obtient m fonctions symétriques élémentaires $s_1, \dots, s_m \in \mathcal{O}(X)$ d'après le lemme 1.26.

$$\prod_{i=1}^m (Y - f_{i,x}(x)) = Y^m + s_1(x) Y^{m-1} + \dots + s_m(x)$$

La proposition 2.10 montre que $s_j = \frac{A_j}{p^{v_j}}$ où $A_j \in \mathbb{C}[X]$ et $v_j \in \mathbb{N}$. On peut supposer la fraction rationnelle $s_j = \frac{A_j}{p^{v_j}}$ irréductible et considérer le polynôme :

$$H(Y, x) = p^w(x) Y^m + A_1(x) Y^{m-1} + \dots + A_m(x)$$

$$\text{où } w = \sup_{1 \leq i \leq m} v_i.$$

$H(Y, x)$ est parfaitement déterminé à une constante complexe près et s'appelle le polynôme associé à la fonction algébrique F . Il vérifie par construction : $p^w(x) F(x)^m + A_1(x) F(x)^{m-1} + \dots + A_m(x) = 0$.

Montrons que le polynôme $H(Y, x)$ est irréductible dans $\mathbb{C}[Y, x]$.

Le polynôme $H(Y, x)$ est un polynôme primitif de $\mathbb{C}(x)[Y]$ puisque les polynômes $p, A_1, \dots, A_m$ de $\mathbb{C}[x]$ ne possèdent pas de racines communes. Notons $\mathbb{C}(x)$ le corps des fractions de l'anneau factoriel $\mathbb{C}[x]$. On sait que montrer que $H(Y, x)$ est irréductible dans $\mathbb{C}[Y, x] = \mathbb{C}[Y][x]$ revient à montrer que $H(Y, x)$ est irréductible dans $\mathbb{C}(x)[Y]$ (cf. [HA] § 11 p 40)

Supposons par l'absurde que $H = H_1 \cdot H_2$ où $H_1, H_2 \in \mathbb{C}(x)[Y]$ sont 2 polynômes en Y à coefficients dans $\mathbb{C}(x)$ et de degré strictement inférieur à m . Il existe alors un polynôme $p(x)$ tel que :

1) $H_1(Y, x) \in \mathbb{C}[Y]$ et $H_2(Y, x) \in \mathbb{C}[Y]$ n'ont pas de racine commune lorsque $x \in \mathbb{C} \setminus p^{-1}(0)$

2) Tous les zéros de $H_1(Y, x)$ sont simple lorsque $x \in \mathbb{C} \setminus p^{-1}(0)$. La proposition 1.29 montre alors que les zéros de $H_1(Y, \sigma)$ sont les branches locales d'une fonction analytique multiforme de $\mathbb{C} \setminus p^{-1}(0)$ de degré $< m$, ce qui est absurde puisque certaines de ces branches locales sont aussi des branches locales de F qui possède m branches locales en tout point de $\mathbb{C} \setminus p^{-1}(0)$

Réciproquement, étant donné un polynôme irréductible $H(Y, x)$ dans $\mathbb{C}[Y, x]$, peut-on trouver une fonction algébrique F définie hors d'un ensemble fini et admettant H comme polynôme associé, à une constante près ?

Notons $H(Y, x) = q_m(x)Y^m + q_{m-1}(x)Y^{m-1} + \dots + q_0(x)$ et remarquons bien que les polynômes $q_i(x)$ n'ont pas de facteurs communs. Soit tout $x \in \mathbb{C} \setminus q_m^{-1}(0)$,

$$H(Y, x) = 0 \Leftrightarrow Y^m + \frac{q_{m-1}(x)}{q_m(x)} Y^{m-1} + \dots + \frac{q_0(x)}{q_m(x)} = 0$$

Le discriminant $\Delta(x)$ de ce polynôme est une fraction rationnelle de la forme $\Delta(x) = \frac{B(x)}{q_m^w(x)}$ où $B \in \mathbb{C}[x]$ et $w \in \mathbb{N}$.

Posons $p = B \cdot q_m$. Si $x \in \mathbb{C} \setminus p^{-1}(0)$, $Y \mapsto H(Y, x)$ possède m racines distinctes deux à deux. Fixons $x_0 \in \mathbb{C} \setminus p^{-1}(0)$ et notons w_0 une racine complexe de $H(Y, x_0) = 0$. D'après la proposition 1.29 il existe un germe $f_0 \in \mathcal{O}_{x_0}$ qui se prolonge le long de tout chemin de $\mathbb{C} \setminus p^{-1}(0)$ en une fonction analytique multiforme F vérifiant

$$\begin{cases} f_0(x_0) = w_0 \\ \forall x \in \mathbb{C} \setminus p^{-1}(0) \quad q_m F^m + q_{m-1} F^{m-1} + \dots + q_0 = 0 \quad \text{dans } \mathcal{O}_x. \end{cases}$$

La proposition 2.10 permet d'affirmer que F est une fonction algébrique de $\mathbb{C} \setminus p^{-1}(0)$.

Comme H est irréductible, on constate que H est, à une constante multiplicative près, le polynôme associé à F .

2.12 Définition

Soit A une fonction algébrique de $\mathbb{C}$ et $H(Y, \sigma) = q_m(\sigma)Y^m + \dots + q_0(\sigma)$ son polynôme irréductible associé. On note $\beta(A) = m$ le nombre de branches locales de A en chaque point et $\delta(A) = \sup \{ \deg q_i / 0 \leq i \leq m \}$. L'entier naturel $d(A) = \beta(A) + \delta(A)$ s'appelle le degré total de la fonction algébrique A .

2.13 Lemme

A et B sont 2 fonctions algébriques sur $\mathbb{C}$, α et β désignent deux branches locales respectives de A et B en un point σ_0 .

(1) Le germe $\alpha + \beta$ donne naissance à une fonction analytique multiforme R qui est algébrique. De plus :

$$\begin{cases} \beta(R) \leq \beta(A) \cdot \beta(B) \\ \delta(R) \leq \beta(A) \cdot \delta(B) + \beta(B) \cdot \delta(A) \end{cases}$$

(2) Le germe $\alpha \cdot \beta$ donne naissance à une fonction analytique multiforme qui est algébrique et qui vérifie les 2 inégalités ci-dessus.

(NB : si A est une constante, les inégalités ci-dessus deviennent des égalités)

preuve : Notons $m = \beta(A)$ et $n = \beta(B)$. Soient :

$H(Y, \sigma)$ le polynôme irréductible associé à A

$G(Y, \sigma)$ " " " " B

$$\begin{cases} H(Y, \sigma) = q_m(\sigma) \prod (Y - \alpha_i(\sigma)) = q_m(\sigma) Y^m + \dots + q_0(\sigma) \\ G(Y, \sigma) = r_n(\sigma) \prod (Y - \beta_j(\sigma)) = r_n(\sigma) Y^n + \dots + r_0(\sigma) \end{cases}$$

Ainsi $\delta(A) = \sup \{ \deg q_i / 0 \leq i \leq m \}$ et $\delta(B) = \sup \{ \deg r_j / 0 \leq j \leq n \}$.

Considérons le polynôme

$$R(Y, \sigma) = \prod_{i=1}^m \prod_{j=1}^n (Y - \alpha_i(\sigma) - \beta_j(\sigma))$$

C'est un polynôme de degré $m.s$ en Y , et qui s'écrit :

$$R(Y, \sigma) = q_m(\sigma)^{-s} \prod_{j=1}^s H(Y - \beta_j(\sigma))$$

$R(Y, \sigma)$ est constitué de monômes de la forme :

$$q_{i_1}(\sigma) \dots q_{i_s}(\sigma) (Y - \beta_{j_1}(\sigma))^{i_1} \dots (Y - \beta_{j_s}(\sigma))^{i_s}$$

où $(j_1, \dots, j_s)$ est une permutation de $\{1, \dots, s\}$ et où $0 \leq i_1 \leq \dots \leq i_s \leq m$

Gardons $i_1, \dots, i_s$ fixes, et faisons la somme de tous ces monômes lorsque $(j_1, \dots, j_s)$ décrit l'ensemble des permutations de $\{1, \dots, s\}$. Nous obtenons des expressions symétriques des β -racines :

$$\mathcal{F}' = \sum_{\substack{(j_1, \dots, j_s) \text{ permutations} \\ \text{de } \{1, \dots, s\}}} q_{i_1}(\sigma) \dots q_{i_s}(\sigma) (Y - \beta_{j_1}(\sigma))^{i_1} \dots (Y - \beta_{j_s}(\sigma))^{i_s}$$

Ainsi $\mathcal{F}' = q_{i_1}(\sigma) \dots q_{i_s}(\sigma) \cdot \mathcal{G}'_1$ avec des notations évidentes.

$\mathcal{G}'_1$ est un polynôme de $\mathbb{C}[Y][\beta_1, \dots, \beta_s]$ symétrique en $\beta_1, \dots, \beta_s$.

On sait qu'un tel polynôme s'écrit de manière unique sous la forme

$$\mathcal{G}'_1(\beta_1, \dots, \beta_s) = g(\bar{\Sigma}_1, \dots, \bar{\Sigma}_s)$$

où $\bar{\Sigma}_1, \dots, \bar{\Sigma}_s$ désignent les s polynômes symétriques élémentaires de $\beta_1, \dots, \beta_s$, et où g désigne un polynôme de $\mathbb{C}[Y][\beta_1, \dots, \beta_s]$ de degré total en $\beta_1, \dots, \beta_s$ égal au degré partiel de $\mathcal{G}'_1$ par rapport à l'une quelconque de ses indéterminées β_j . (cf. [QUE] Théorème 21 p 431)

Dans notre cas : $\deg g \leq i_s \leq m$, et les polynômes symétriques élémentaires de $\beta_1, \dots, \beta_s$ sont : $\bar{\Sigma}_{i+1} = (-1)^{i+1} \frac{n_i}{n_s}$ $0 \leq i \leq s-1$

de sorte que :

$$\mathcal{F}' = q_{i_1}(\sigma) \dots q_{i_s}(\sigma) \cdot g\left(-\frac{n_0}{n_s}, \frac{n_1}{n_s}, \dots, (-1)^s \frac{n_{s-1}}{n_s}\right)$$

En mettant n_s^{-m} en facteur dans g ,

$$\mathcal{F}' = q_{i_1}(\sigma) \dots q_{i_s}(\sigma) \cdot n_s^{-m} g_1(n_0, \dots, n_{s-1}, n_s)$$

où g_1 est un polynôme de $\mathbb{C}[Y, n_0, \dots, n_s]$ de degré total en $n_0, \dots, n_s$ inférieur à m .

Finalement, nous obtenons $R(Y, \sigma) = q_m(\sigma)^{-s} \alpha_s(\sigma)^{-m} R_0(Y, \sigma)$
 où $R_0(Y, \sigma) = p_{ms}(\sigma) Y^{ms} + \dots + p_0(\sigma)$, les polynômes en σ $p_0, \dots, p_{ms}$
 vérifiant : $0 \leq j \leq ms \quad \deg p_j \leq s \delta(A) + m \delta(B)$

Le polynôme $R_0(Y, \sigma)$ n'est pas irréductible en général, mais si α et β
 sont des branches locales de A et B en un point $\sigma_0 \in \mathbb{C} \setminus (q^{-1}(0) \cup \alpha^{-1}(0))$,
 $\alpha + \beta$ est une branche locale d'une fonction algébrique dont le polynôme
 irréductible associé est un diviseur du polynôme R_0 . De sorte que
 $\beta(R) \leq \beta(A) \cdot \beta(B)$ et $\delta(R) \leq s \delta(A) + m \delta(B)$.

* La 2^e partie du lemme se montre de la même manière : avec les mêmes notations,
 considérons le polynôme de degré $m \cdot s$ en Y :

$$S(Y, \sigma) = \prod_{i=1}^m \prod_{j=1}^s (Y - \alpha_i(\sigma) \beta_j(\sigma))$$

On peut l'écrire $S(Y, \sigma) = q_m(\sigma)^{-1} \prod_{j=1}^s \beta_j(\sigma)^m H\left(\frac{Y}{\beta_j(\sigma)}\right)$, ce dernier produit
 étant constitué de monômes de la forme :

$$\beta_{j_1}(\sigma)^{m_1} \dots \beta_{j_s}(\sigma)^{m_s} q_{i_1}(\sigma) \dots q_{i_s}(\sigma) \left(\frac{Y}{\beta_{j_1}(\sigma)}\right)^{i_1} \dots \left(\frac{Y}{\beta_{j_s}(\sigma)}\right)^{i_s}$$

où $(j_1, \dots, j_s)$ est une permutation de $\{1, \dots, s\}$ et $0 \leq i_1 \leq \dots \leq i_s \leq m$.

Gardons $i_1, \dots, i_s$ fixes, et faisons la somme de tous ces monômes lorsque
 $(j_1, \dots, j_s)$ décrit l'ensemble des permutations de $\{1, \dots, s\}$. On obtient des
 expressions symétriques des β -racines :

$$g = \sum_{\substack{(j_1, \dots, j_s) \text{ permutation} \\ \text{de } \{1, \dots, s\}}} q_{i_1}(\sigma) \dots q_{i_s}(\sigma) \beta_{j_1}(\sigma)^{m-i_1} \dots \beta_{j_s}(\sigma)^{m-i_s} Y^{i_1 + \dots + i_s}$$

$$g = q_{i_1}(\sigma) \dots q_{i_s}(\sigma) g_1$$

g_1 est un polynôme de $\mathbb{C}[Y][\beta_1, \dots, \beta_s]$ symétrique en $\beta_1, \dots, \beta_s$. Il
 s'écrit donc en fonction des expressions symétriques élémentaires de $\beta_1, \dots, \beta_s$
 à savoir les $\sum_{i=1}^s (-1)^{i+1} \frac{r_i}{r_s}$ ($0 \leq i \leq s-1$) :

$$g_1(\beta_1, \dots, \beta_s) = g(\Sigma_1, \dots, \Sigma_s)$$

où g est un polynôme de $\mathbb{C}[Y][\beta_1, \dots, \beta_s]$ de degré total en $\beta_1, \dots, \beta_s$ égal au degré partiel de g_1 par rapport à l'une quelconque de ses indéterminées β_j . Ici $\deg g \leq m - i_1 \leq m$.

$$g = q_{i_1}(\sigma) \dots q_{i_s}(\sigma) \cdot g\left(-\frac{r_0}{r_1}, \frac{r_1}{r_s}, \dots, (-1)^s \frac{r_{s-1}}{r_s}\right)$$

En mettant r_s^m en facteur dans g :

$$g = q_{i_1}(\sigma) \dots q_{i_s}(\sigma) \cdot r_s^{-m} g_1(r_0, \dots, r_{s-1}, r_s)$$

où g_1 est un polynôme de $\mathbb{C}[Y, r_0, \dots, r_s]$ de degré total en $r_0, \dots, r_s \leq m$.

Finalement :

$$S(Y, \sigma) = q_m(\sigma)^{-s} r_s(\sigma)^{-m} S_0(Y, \sigma)$$

où $S_0(Y, \sigma) = p_{m_0}(\sigma) Y^{m_0} + \dots + p_0(\sigma)$, les polynômes $p_0, \dots, p_{m_0}$ vérifiant :

$$0 \leq j \leq m_0 \quad \deg p_j \leq s \delta(A) + m \delta(B)$$

On conclut à l'aide de $S_0(Y, \sigma)$ comme précédemment.

CQFD

Ce lemme nous permet de montrer un résultat intéressant :

2.14 Proposition (Racines réelles d'une fonction algébrique d'une variable complexe)

Soit A une fonction algébrique définie sur $\mathbb{C} \setminus q^{-1}(0)$, où $q \in \mathbb{C}[X]$ vérifie $[0, 1] \cap q^{-1}(0) = \emptyset$. Soit $\alpha(t)$ une branche locale de A définie sur un voisinage ouvert du segment réel $[0, 1]$.

De 2 choses l'une :

(1) Soit bien $\Im m \alpha(t) \equiv 0$ pour $0 \leq t \leq 1$.

(2) Soit bien l'application $t \mapsto \Im m \alpha(t)$ possède au plus

$2 \cdot \beta(A) \delta(A)$ zéros sur le segment $[0, 1]$.

Remarque : On peut remplacer $\Im m \alpha(t)$ par $\Re e \alpha(t)$ dans l'énoncé de cette proposition.

preuve :

Notons $H(Y, \sigma) = q_m(\sigma)Y^m + \dots + q_0(\sigma)$ le polynôme irréductible associé à A , et définissons les polynômes $\bar{q}_0, \dots, \bar{q}_m$ par :

$$\bar{q}_v(\sigma) = \sum \bar{c}_{vj} \sigma^j \quad \text{lorsque} \quad q_v(\sigma) = \sum c_{vj} \sigma^j.$$

Posons $\bar{H}(Y, \sigma) = \bar{q}_m(\sigma)Y^m + \dots + \bar{q}_0(\sigma)$. $\bar{H}(Y, \sigma)$ est aussi un polynôme irréductible et si $t \in [0, 1]$, en notant $\alpha_1(t), \dots, \alpha_m(t)$ les racines de $Y \mapsto H(Y, t)$, les complexes conjugués $\bar{\alpha}_1(t), \dots, \bar{\alpha}_m(t)$ sont les racines de $Y \mapsto \bar{H}(Y, t)$. $\bar{\alpha}_1(t), \dots, \bar{\alpha}_m(t)$ sont donc les branches locales d'une fonction algébrique dont le polynôme associé est $\bar{H}(Y, \sigma)$.

Considérons la branche locale $\alpha(t)$ définie sur un voisinage ouvert du segment $[0, 1]$, et posons $\varphi(t) = \operatorname{Im} \alpha(t) = \frac{\alpha(t) - \bar{\alpha}(t)}{2i}$. $\varphi(t)$ est une branche locale d'une autre fonction algébrique R et le lemme 2.13 montre que : $\beta(R) \leq m^2$ et $\delta(R) \leq 2m\delta(A)$.

Par suite, $\varphi(t)$ satisfait une équation irréductible du type :

$$g_{\beta(R)}(t) \varphi^{\beta(R)}(t) + \dots + g_1(t) \varphi(t) + g_0(t) = 0 \quad \text{pour } 0 \leq t \leq 1$$

où $g_{\beta(R)}(t) \neq 0$ pour tout $t \in [0, 1]$ et $\deg g_0(t) \leq 2m\delta(A)$.

Deux cas peuvent se produire :

$$1) \quad g_0(t) \equiv 0 \text{ sur } 0 \leq t \leq 1.$$

Comme le polynôme ci-dessus est irréductible dans $\mathbb{C}[Y, t]$, il est nécessairement de degré 1 et $\varphi(t) = 0$ pour tout $t \in [0, 1]$.

$$2) \quad g_0(t) \not\equiv 0 \text{ sur } 0 \leq t \leq 1.$$

Si $t \in [0, 1]$ vérifie $\varphi(t) = 0$, alors $g_0(t) = 0$. Comme $\deg g_0 \leq 2m\delta(A)$ il est clair que le nombre de zéros de φ appartenant à l'intervalle $[0, 1]$ est inférieur à $2m\delta(A)$.

CQFD

Chemins algébriques réguliers de $\mathbb{C}^n$

2.15 Définition

On dit que le chemin $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}^n$ est un chemin algébrique régulier de $\mathbb{C}^n$ si $\gamma(t) = (\alpha_1(t), \dots, \alpha_n(t))$ où chaque α_j est une branche locale d'une fonction algébrique A_j de $\mathbb{C}$ définie sur un voisinage ouvert du segment $[0, 1]$.

Le rang total de γ est l'entier $d(\gamma) = \sup \{d(A_j) \mid 1 \leq j \leq n\}$ où $d(A_j)$ est défini au paragraphe 2.12.

exemple: Un chemin $\gamma(t) = (p_1(t), \dots, p_n(t))$ où $p_1, \dots, p_n$ sont des polynômes en t à coefficients complexes est un chemin algébrique régulier de rang total $d(\gamma) = \sup \deg p_i + 1$.

2.16 Proposition

Soit $P(X, Y) \in \mathbb{C}[X, Y]$ un polynôme de degré total d .

Deux cas sont seulement possibles :

- 1) $P^{-1}(0) \cap \mathbb{R}^2$ contient une courbe plane.
- 2) $P^{-1}(0) \cap \mathbb{R}^2$ est un ensemble fini, et $\# P^{-1}(0) \cap \mathbb{R}^2 \leq d^2$

preuve :

Raisonnons par récurrence sur le degré de P . Si P est une constante, la proposition est triviale. Montrons la pour un polynôme P de degré $\deg P \geq 1$.

Supposons donc que $\deg P \geq 1$ et que $P^{-1}(0) \cap \mathbb{R}^2$ ne contienne pas de courbes planes. Nous cherchons les couples réels $(s, t) \in \mathbb{R}^2$ tels que $P(s, t) = 0$.

Notons $P(s, t) = Q(s, t) + i R(s, t)$ où $Q, R \in \mathbb{R}[s, t]$

$$P(s, t) = 0 \text{ssi } Q(s, t) = R(s, t) = 0$$

Considérons les hypersurfaces algébriques Q et R dans $\mathbb{C}^2$ et leur intersection dans le but d'appliquer le théorème de Bezout.

Notons :

$$\begin{cases} Q(s, t) = D(s, t) \tilde{Q}(s, t) \\ R(s, t) = D(s, t) \tilde{R}(s, t) \end{cases}$$

où les polynômes $\tilde{Q}$ et $\tilde{R}$ n'ont pas de facteur commun.

$$\# \{ (s, t) \in \mathbb{R}^2 / P(s, t) = 0 \} = a + b$$

$$\text{où } a = \# \{ (s, t) \in \mathbb{R}^2 / D(s, t) = 0 \}$$

$$b = \# \{ (s, t) \in \mathbb{R}^2 / \tilde{Q}(s, t) = \tilde{R}(s, t) = 0 \}$$

Le théorème de Bezout montre que $b \leq \deg \tilde{Q} \cdot \deg \tilde{R} \leq (\deg P - \deg D)^2$ et 2 cas sont possible :

* Si $\deg D < \deg P$, on applique l'hypothèse de récurrence : l'ensemble des zéros réels (s, t) de D ne peut pas former une courbe de $\mathbb{R}^2$ puisqu'une telle courbe serait formée de zéros de P . Donc $a \leq (\deg D)^2$ et $\# \{ (s, t) \in \mathbb{R}^2 / P(s, t) = 0 \} \leq (\deg P)^2$.

* Si $\deg D = \deg P$, comme $\deg Q \leq \deg P$ et $\deg R \leq \deg P$, les polynômes $\tilde{Q}$ et $\tilde{R}$ sont constants. Il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $Q = \lambda R$ ou $R = \lambda Q$. Par suite $P = (\lambda + i)R$ ou $P = (-1 + \lambda i)Q$, et dans les deux cas, il existe $\xi \in \mathbb{C}$ tel que $\frac{1}{\xi} P$ soit un polynôme à coefficients réels. Comme $(\frac{1}{\xi} P)^{-1}(0) = P^{-1}(0)$, on peut supposer que $P \in \mathbb{R}[s, t]$. Alors :

$$\forall (s, t) \in P^{-1}(0) \quad \frac{\partial P}{\partial s}(s, t) = \frac{\partial P}{\partial t}(s, t) = 0$$

En effet, si $\frac{\partial P}{\partial t}(s, t) \neq 0$ et $(s, t) \in P^{-1}(0)$, le théorème des fonctions implicites montre l'existence d'une courbe $C^\infty : t \mapsto \gamma(t)$ telle que $P(\gamma(t), t) = 0$, ce qui est contraire à l'hypothèse.

Notons :

$$\begin{cases} P(s, t) = D_1(s, t) \cdot \tilde{P}_1(s, t) \\ \frac{\partial P}{\partial s}(s, t) = D_1(s, t) \cdot \tilde{P}_2(s, t) \end{cases}$$

où $\tilde{P}_1$ et $\tilde{P}_2$ n'ont pas de facteur commun.

Alors $\deg D_1 \leq \deg \frac{\partial P}{\partial \Delta} < \deg P$ et l'hypothèse de récurrence montre que :

$$\# \{(s, t) \in \mathbb{R}^2 / P(s, t) = 0\} = \underbrace{\# \{(s, t) \in \mathbb{R}^2 / D_1(s, t) = 0\}}_{\leq (\deg D_1)^2} + \underbrace{\# \{(s, t) \in \mathbb{R}^2 / \tilde{P}_1(s, t) = \tilde{P}_2(s, t) = 0\}}_{\leq (\deg P - \deg D_1)^2}$$

$$\text{d'où } \# P^{-1}(0) \cap \mathbb{R}^2 \leq (\deg P)^2$$

CQFD

Cette proposition nous sera utile pour démontrer le théorème 2.19 concernant les chemins algébriques réguliers de $\mathbb{C}^n$. Nous devons encore nous munir de deux lemmes :

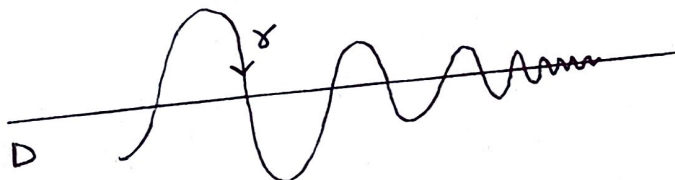
2.17 lemme :

Si $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$ est un chemin algébrique et si D est une droite réelle de $\mathbb{C}$, deux cas sont seulement possibles :

(1) $\gamma \subset D$

(2) $\gamma \cap D$ est fini, alors $\# \gamma \cap D \leq 2 \beta(\gamma) \cdot \delta(\gamma)$

preuve : En d'autres termes, le cas de figure ci-dessous est impossible à réaliser avec un chemin algébrique :



Il existe une transformation affine $\theta : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ qui transforme la droite D en $\mathbb{R}$ (θ est un changement de coordonnées), et l'application $\theta \circ \gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$ est une fonction algébrique définie sur un voisinage de $[0, 1]$ telle que :

$$\beta(\theta \circ \gamma) = \beta(\gamma) \quad \text{et} \quad \delta(\theta \circ \gamma) = \delta(\gamma)$$

$$\text{De plus : } \forall t \in [0, 1] \quad \gamma(t) \in D \Leftrightarrow \theta \circ \gamma(t) \in \mathbb{R}$$

La proposition 2.14 nous montre que 2 cas sont possibles :

- (1) $\exists m \ \partial \circ \gamma(t) \equiv 0$ sur $0 \leq t \leq 1$, et alors $\gamma \subset D$
 ou (2) $\# \{t \in [0,1] / \partial \circ \gamma(t) \in \mathbb{R}\} \leq 2 \delta(\gamma) \beta(\gamma)$.

Le lemme en résulte.

2.18 lemme (majoration de $L(\gamma)$)

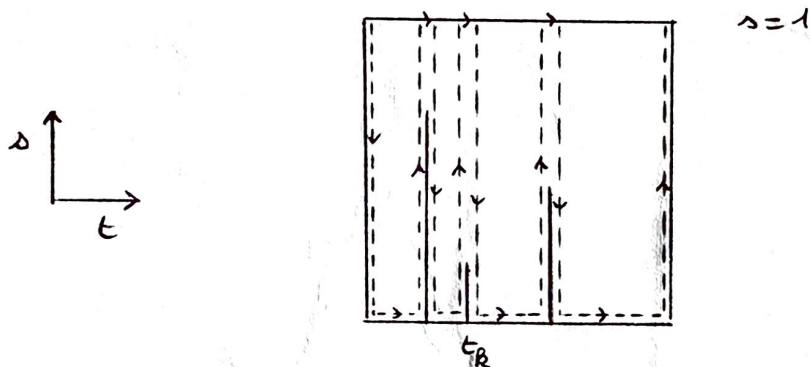
Soit γ un chemin de l'ouvert X de $\mathbb{C}^n$ et $x_0 \in X$ tel que l'ensemble $\Sigma \doteq \{t \in [0,1] / \exists s \in [0,1] \ (1-s)x_0 + s\gamma(t) \notin X\}$ soit fini.

En notant μ le nombre d'éléments de Σ , on a :

$$L(\gamma) \leq 3\mu + 2$$

preuve :

Notons $\Sigma = \{t_1, \dots, t_\mu\}$ et dessinons un carré.



Les segments verticaux ont pour abscisse les nombres $t_1, \dots, t_\mu$ de Σ .

Si $1 \leq k \leq \mu$, le k -segment vertical est défini par $t = t_k$ et $0 \leq s \leq s_k$ où $s_k = \sup \{s / (1-s)x_0 + s\gamma_k(t) \notin X\} < 1$.

Construisons le chemin C , polygonal dans ce carré, de la façon suivante : C est d'origine $(0,1)$ et d'extrémité $(1,1)$, et consiste en μ segments situés le long de $s=1$ et pour t variant dans les petits intervalles $t_k - \delta < t < t_k + \delta$ (où $\delta < 1$), complétés par des segments verticaux $t = t_k - \delta$ et $t = t_k + \delta$ ($1 \leq k \leq \mu$), et le long de $s=0$ par des segments tels que t soit en dehors des intervalles $]t_k - \delta, t_k + \delta[$.

Enfin, C contient les segments $t=0$ (resp. $t=1$) lorsque 0 (resp. 1) n'appartient pas à Σ .

Un tel chemin C est formé d'au plus $2\mu + \mu + 2 = 3\mu + 2$ morceaux et nous permet de construire le chemin Γ de X de la façon suivante :

Notons $\Psi : C[0,1] \longrightarrow X$

$$(t, s) \longmapsto (1-s)x_0 + s\gamma(t)$$

et définissons Γ pour $\tau \in [0,1]$ par :

$$\begin{cases} \Gamma(\tau) = \Psi(C(\tau)) \text{ lorsque } C(\tau) \text{ n'est pas sur le segment } s=1 \\ \Gamma = \text{segment de } X \text{ joignant } \Psi(t_R - \delta, 1) \text{ à } \Psi(t_R + \delta, 1) \text{ lorsque} \\ C(\tau) \text{ est dans le segment } \{s=1 \text{ et } t_R - \delta \leq t \leq t_R + \delta\}. \end{cases}$$

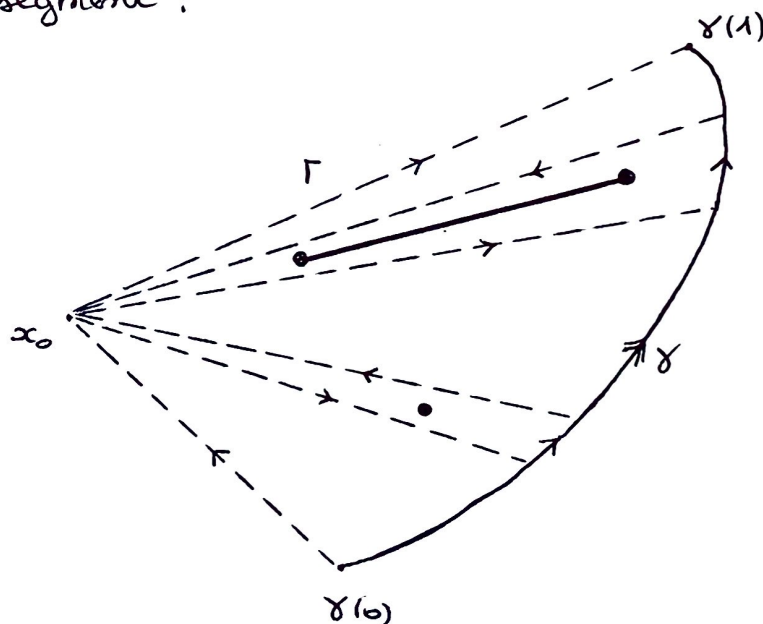
Si δ est suffisamment petit, les segments de X joignant $\gamma(t_R - \delta)$ à $\gamma(t_R + \delta)$ sont homotopes aux chemins $\gamma|_{[t_R - \delta, t_R + \delta]}$. Il est alors clair que Γ est homotope à γ puisque le chemin C peut être déformé continuellement jusqu'au segment $s=1$ sans rencontrer les points critiques (t, s) pour lesquels $(1-s)x_0 + s\gamma(t) \notin X$.

Finalement nous obtenons bien :

$$L(\gamma) \leq L(\Gamma) \leq 3\mu + 2$$

CQFD

Nous pouvons représenter ce travail sur le dessin suivant, dans le cas particulier où l'ouvert X est le plan complexe privé d'un point et d'un segment :



2.19 Théorème

Soient $p \in \mathbb{C}[X_1, \dots, X_n]$ et $\omega \in \mathbb{N}^*$. Il existe un entier $\chi(\omega)$ tel que $L(\gamma) \leq \chi(\omega)$ pour tous les chemins γ de $\mathbb{C}^n \setminus p^{-1}(0)$ qui sont homotopes à un chemin algébrique régulier de rang total inférieur ou égal à ω .

preuve :

Soit $\gamma(t) = (\alpha_1(t), \dots, \alpha_n(t))$ un chemin algébrique régulier de $\mathbb{C}^n \setminus p^{-1}(0)$ et $z \in \mathbb{C}^n \setminus p^{-1}(0)$. Posons $Q(z, s, t) = p(z + s(\gamma(t) - z))$ et supposons que $d(\gamma) \leq \omega$.

Si l'ensemble $\Sigma(z) \doteq \{t \in [0, 1] / \exists s \in [0, 1] \quad Q(z, s, t) = 0\}$ est fini et possède μ éléments, le lemme 2.18 montre que $L(\gamma) \leq 3\mu + 2$.

Il nous suffit donc de montrer que pour un choix générique de z le nombre de zéros de $Q(z, s, t)$ situés dans le carré réel $[0, 1] \times [0, 1]$ est majoré par une constante qui dépend uniquement de ω , du degré du polynôme p et du nombre de variables n .

Posons $u = \gamma(t)$ et cherchons les couples réels (s, t) solutions du système :

$$(I) \quad \begin{cases} Q(z, s, u) = 0 \\ Q_1(t, u_1) = 0 \\ \dots \\ Q_n(t, u_n) = 0 \end{cases} \quad \text{où } u = (u_1, \dots, u_n) = \gamma(t) = (\gamma_1(t), \dots, \gamma_n(t))$$

et où $Q_i(t, u_i) = q_{m_i, i}(t) u_i^{m_i} + \dots + q_{1, i}(t) u_i + q_{0, i}(t)$ est le polynôme irréductible associé à A_i .

1) Cas où $n=1$

Le système (I) devient :

$$\begin{cases} Q(z, s, u) = p(z + s(u-z)) = 0 \\ Q_1(t, u) = 0 \end{cases}$$

où $\deg_u Q = \deg p = k$ et $\deg_u Q_1 = m \leq d(\gamma) \leq \omega$.

Notons $R(z, s, t)$ le résultant en u des polynômes Q et Q_1 . En notant :

$$Q = a_k u^k + \dots + a_0 \quad \text{et} \quad Q_1 = q_m u^m + \dots + q_0$$

On sait que le degré de R en $a_0, \dots, a_k$ est m et que celui de R en $q_0, \dots, q_m$ est k , de sorte que si $\deg R$ désigne le degré de $R(z, s, t)$ en (s, t) , on ait :

$$\begin{aligned} \deg R &\leq m \sup \deg a_i + k \sup \deg q_i \\ &\leq m \deg p + k \delta(A) \\ &\leq \beta(A) \deg p + \deg p \delta(A) \\ &\leq \omega \deg p \quad (1) \end{aligned}$$

Ainsi le degré du résultant $R(z, s, t)$ est majoré par $\omega \deg p$.

Le nombre de racines de p est fini : $p^{-1}(0) = \{p_1, \dots, p_k\}$. Considérons les k droites réelles $(z, p_1), \dots, (z, p_k)$. Le lemme 2.17 montre que le chemin γ coupe l'une de ces droites une infinité de fois si γ est un segment. Choisissons donc $z \in \mathbb{C} \setminus \tilde{p}^{-1}(0)$ tel qu'aucune des droites $(z, p_1), \dots, (z, p_k)$ ne contienne le chemin γ en entier. Avec ce choix générique de z l'ensemble $\gamma \cap ((z, p_1) \cup \dots \cup (z, p_k))$ est fini. De plus on a :

$$\# \left\{ (s, t) \in [0, 1]^2 / u = \gamma(t) \text{ et } p(z + u(s-z)) = 0 \right\} < \infty$$

En effet :

- si $\gamma(t) = u$ pour une infinité de valeurs de t alors γ est un segment (éventuellement un point), et le choix de z montre qu'il n'existe pas de réel $s \in [0, 1]$ tel que $p(z + s(u-z)) = 0$ dans ce cas.
- si $\gamma(t) = u$ pour un nombre fini de valeurs de t , le polynôme en s $p(z + s(u-z))$ admet seulement k racines complexes pour chaque t fixé, d'où notre assertion.

$$\text{on en déduit : } \# \left\{ (s, t) \in [0, 1]^2 / R(z, s, t) = 0 \right\} < \infty$$

Enfin la proposition 2.16 allée à l'inégalité (1) montrent que :

$$\# \{ (s, t) \in [0, 1]^2 / R(z, s, t) = 0 \} \leq \omega^2 (\deg p)^2$$

d'où $L(\gamma) \leq 3\omega^2 (\deg p)^2 + 2$ pour tout chemin algébrique régulier γ de rang total $d(\gamma) \leq \omega$.

2) Cas où $n \geq 2$: esquisse de démonstration.

Soit $(s, t) \in [0, 1]^2$ un couple solution du système (I). Soit $R_1(z, s, t, u_2, \dots, u_n)$ le résultant des deux premières équations de (I), (s, t) est alors solution du système :

$$S_{n-1} \begin{cases} R_1(z, s, t, u_2, \dots, u_n) = 0 \\ Q_2(t, u_2) = 0 \\ \dots \dots \dots \\ Q_n(t, u_n) = 0 \end{cases}$$

On considère de même le résultant des deux premières équations de S_{n-1} pour obtenir le système S_{n-2} . Finalement on arrive au système :

$$S_0 \begin{cases} R_{n-1}(z, s, t, u_n) = 0 \\ Q_n(t, u_n) = 0 \end{cases}$$

dont le résultant $R_n(z, s, t)$ a un degré majoré par une constante qui ne dépend que de ω , du degré de p , et du nombre de variables n .

Il nous reste donc à montrer que l'ensemble $\{(s, t) \in [0, 1]^2 / R_n(z, s, t) = 0\}$ est de cardinal fini pour une valeur générique de z .

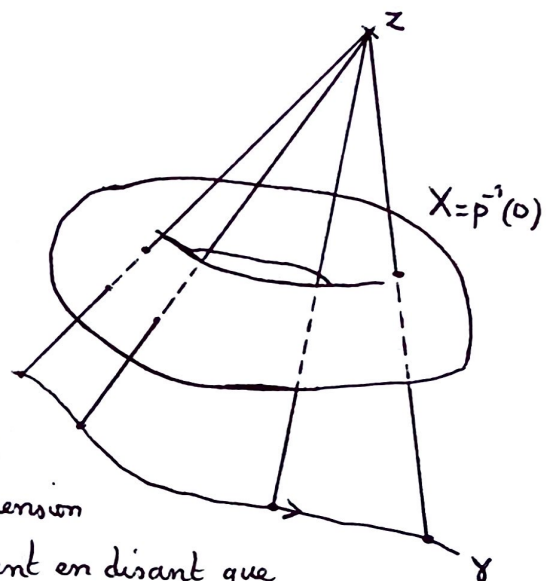
Ceci est plus difficile que pour $n=1$ car ici nous n'avons aucun renseignement sur l'hypersurface $X = p^{-1}(0)$ de $\mathbb{C}^n$. En séparant parties réelles et imaginaires du polynôme p nous obtenons une sous-variété de $\mathbb{R}^{2n}$ d'équations :

$$P_1 = 0, P_2 = 0$$

Notons $u_k = x_k + iy_k$ et $Q_k(u_k, t) = R_{k,1}(x_k, y_k, t) + i R_{k,2}(x_k, y_k, t)$ pour $1 \leq k \leq n$.

et considérons le sous ensemble $\bar{\gamma}$ de $\mathbb{R}^{2n}$ défini par le système :

$$\begin{cases} R_{1,1} = 0, R_{1,2} = 0 \\ \dots \\ R_{n,1} = 0, R_{n,2} = 0 \\ P \neq 0 \end{cases}$$



$\bar{\gamma}$ est un ensemble semi-algébrique de $\mathbb{R}^{2n}$ tel que $\gamma \subset \bar{\gamma}$ et $\bar{\gamma} \cap X = \emptyset$. Soit $\mathcal{S}$ le sous ensemble du produit $\bar{\gamma} \times X \times (\mathbb{R}^{2n} \setminus (\bar{\gamma} \cup X))$ formé des triplets de points alignés et distincts deux à deux. Il est immédiat que $\mathcal{S}$ est un ensemble semi-algébrique, de plus la dimension de $\mathcal{S}$ est égale à $n+2$. On peut le justifier intuitivement en disant que pour se donner un élément de $\mathcal{S}$ il faut 1 paramètre pour le point de γ , n paramètres pour le point de X , et 1 paramètre pour fixer z sur la droite joignant les deux points précédents soit au total $n+2$ paramètres.

Effectuons successivement deux projections de la façon suivante :

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{S} \subset \bar{\gamma} \times X \times (\mathbb{R}^{2n} \setminus (\bar{\gamma} \cup X)) & \text{ensemble semi-algébrique de dimension} & 1 + (2n-2) + 2n = 4n-1 \\ \pi \downarrow & & \\ \pi(\mathcal{S}) \subset \bar{\gamma} \times (\mathbb{R}^{2n} \setminus (\bar{\gamma} \cup X)) & \text{ensemble semi-algébrique de dimension} & 2n+1 \\ \pi' \downarrow & & \\ \mathbb{R}^{2n} \setminus (\bar{\gamma} \cup X) & \text{ensemble semi-algébrique de dimension} & 2n \end{array}$$

Le théorème de Seidenberg-Tarski montre que $\pi(\mathcal{S})$ est aussi un ensemble semi-algébrique et que sa dimension est inférieure ou égale à celle de $\mathcal{S}$ donc :

$$\text{dimension de } \pi(\mathcal{S}) \leq n+2.$$

D'autre part $\pi(\mathcal{S})$ est projeté sur un ensemble semi-algébrique de dimension $2n$

or $2n \geq n+2$ puisque $n \geq 2$, donc il existe un ouvert dense U de $\mathbb{R}^4 \setminus (\bar{\gamma} \cup X)$ tel que pour $z \in U$ l'ensemble des triplets (z, u, x) de points alignés tels que $u \in \bar{\gamma}$ et $x \in X$ soit fini. En particulier, pour $z \in U$, il n'y a qu'un nombre fini de ces triplets avec $u \in \gamma$. Par le même raisonnement qu'en 1°) a) u ne peut correspondre qu'à un nombre fini de valeurs de $t : t_1, \dots, t_k$.

Pour chaque $1 \leq j \leq k$ le polynôme en $s : p(z + s(\gamma(t_j) - z))$ ne peut être identiquement nul sans quoi il s'annulerait pour $s=0$ d'où $z \in X$ ce qui est exclu. Donc il n'a qu'un nombre fini de racines. Nous avons donc prouvé que :

$$\# \{ (s, t) \in [0, 1]^2 / u = \gamma(t) \text{ et } p(z + u(s - z)) = 0 \} < \infty$$

par conséquent pour $z \in U$, l'ensemble :

$$\{ (s, t) \in [0, 1]^2 / R_m(z, s, t) = 0 \} \text{ est fini}$$

On conclut alors comme dans le premier cas : si le degré de R_m est majoré par $C(n, \deg p, \omega)$ la proposition 2.16 montre que le cardinal de l'ensemble précédent est majoré par $C^2(n, \deg p, \omega)$ d'où $L(\gamma) \leq 3 C^2(n, \deg p, \omega) + 2$

C.Q.F.D.

Images polynomiales (resp. algébriques) de fonctions
de la classe de Nilsson

Le théorème précédent permet d'obtenir de nombreuses propriétés des fonctions de la classe de Nilsson.

Rappelons qu'une application $P : \mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{C}^m$

$$z = (z_1, \dots, z_n) \longmapsto (p_1(z), \dots, p_m(z))$$

où $p_i \in \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$ pour tout $1 \leq i \leq m$ s'appelle une application polynomiale de $\mathbb{C}^n$ vers $\mathbb{C}^m$.

2.20 Proposition

Soient $P : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^m$ une application polynomiale, $p \in \mathbb{C}[x_1, \dots, x_m]$ et $z_0 \in \mathbb{C}^n$ tel que $z_0 = P(z_0) \in \mathbb{C}^m \setminus p^{-1}(0)$.

Il existe un polynôme q à n variables dépendant uniquement de p et de P tel que pour toute fonction $F \in H^0(\mathbb{C}^m \setminus p^{-1}(0))$ et pour $f_0 \in S_F(z_0)$, le germe $f_0(P(z)) \in \mathcal{O}_{z_0}$ définisse une fonction analytique multiforme G sur $\mathbb{C}^n \setminus q^{-1}(0)$.

On définit ainsi une application :

$$\begin{array}{ccc} P^* : H^0(\mathbb{C}^m \setminus p^{-1}(0)) & \longrightarrow & H^0(\mathbb{C}^n \setminus q^{-1}(0)) \\ F & \longmapsto & G \end{array}$$

qui possède les propriétés suivantes :

$$(1) \quad \forall z \in \mathbb{C}^n \setminus q^{-1}(0) \quad S_G(z) \subset P^*(S_F(P(z)))$$

$$\text{où l'on note } P^*(S_F(P(z))) \doteq \{ h \in \mathcal{O}_z / \exists \varphi \in S_F(P(z)) \quad h = \varphi \circ P \}$$

(2) Si F est à détermination finie faible, $G = P^*(F)$ est aussi à détermination finie faible.

$$(3) \quad P^*(\mathcal{N}(\mathbb{C}^m \setminus p^{-1}(0))) \subset \mathcal{N}(\mathbb{C}^n \setminus q^{-1}(0))$$

NB: p 62 et 63

Il est nécessaire de supposer que $G = \rho^* F$ dépend du choix du germe $f_0 \in \mathcal{F}_F(S_0)$ où $S_0 = \rho(z_0)$.

En effet, si l'on choisit un autre germe $f_1 \in \mathcal{F}_F(S_0)$, $f_1 \neq f_0$, il se peut que l'on ne puisse pas trouver de lacets $\gamma \in \mathcal{C}(z_0)$ tel que $f_0 \circ \rho$ se prolonge le long de γ pour donner $(f_0 \circ \rho)_\gamma = f_1 \circ \rho$.

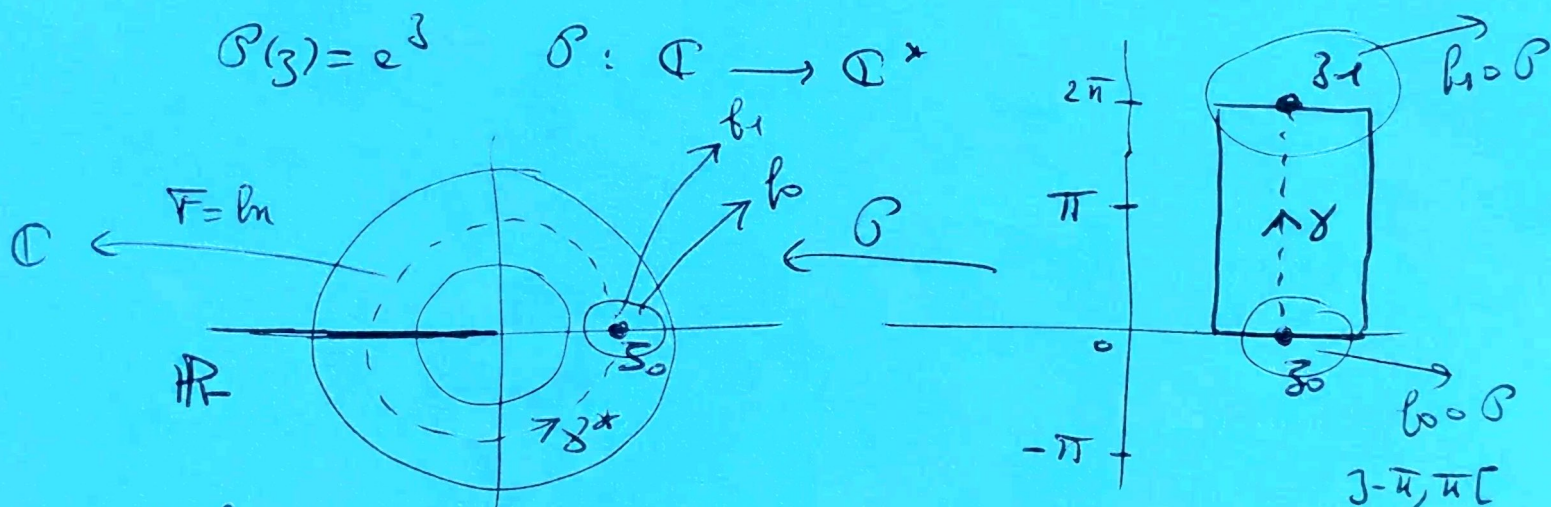
Contre-exemple: la démonstration est la même si ρ est analytique et si les hypersurfaces algébriques $\rho^{-1}(w)$ sont remplacées par des hyp. analytiques

$$F_{\mathbb{C}} = \ln z$$

$$F: \mathbb{C}^* \rightarrow \mathbb{C}$$

$$\rho(z) = e^z$$

$$\rho: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}^*$$



Sur $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_+$ $\left\{ \begin{array}{l} f_0 = \text{détermination de } \ln z \text{ correspondant à } f_0(z) = \ln|z| + i \arg_0 z \\ f_k = \text{ " " " } f_k(z) = \ln|z| + i \arg_k z \text{ où } \arg_k z \in]-\pi + k2\pi, \pi + k2\pi[\\ f_1 = \text{ " " " } f_1(z) = \ln|z| + i \arg_1 z, \arg_1 z \in]\pi, 3\pi[\end{array} \right.$
on a: $f_0(e^z) = z$ et $f_1(e^z) = z + i2\pi$ où $z \in \{z \in \mathbb{C} / \operatorname{Im} z \in]-\pi, \pi[\}$

Pour obtenir $f_0 \circ \rho$ en S_0 , il faut parcourir le chemin $\gamma \in \mathcal{C}(z_0, z_1)$ et l'on se trouve alors en z_1 !

$F \circ \rho$ est donc déterminée par le choix de f_0 , ie du germe $f_0 \circ \rho$ en z_0 . $F \circ \rho$ est alors anal. multiforme. Il est clair que $f_1 \circ \rho$ en z_0 n'est pas une branche de $F \circ \rho$ puisque $F \circ \rho$ anal. mult. sur $\mathbb{C} \Rightarrow$ uniforme sur $\mathbb{C}$ ($\mathbb{C}$ simpl. connexe) et l'on ne peut jamais obtenir $f_1 \circ \rho$ en z_0 en utilisant un

facet de $z_0 \leadsto z_0$! On est obligé d'aller en z_1 , tel que $\lambda(z_1) = z_0$, pour obtenir $f_1 \circ \beta$ comme branche de $F \circ \beta$

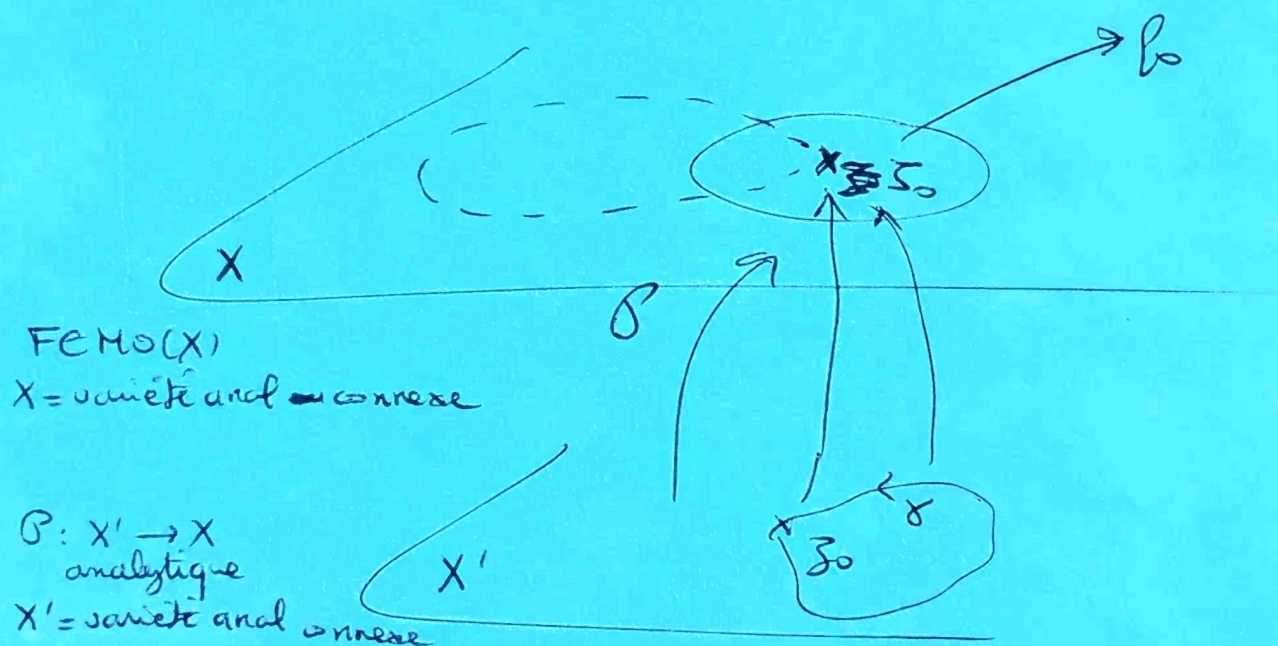
Autre contre-exemple : Si $\beta =$ fonction constante,

~~β~~ $F \circ \beta$ sera engendré par $f_0 \circ \beta$ où f_0 est une clt.

de F en $z_0 = \beta(\mathbb{C}^n)$. ~~Par contre~~ ~~Supp~~ $z_0 \notin \beta^{-1}(z_0)$

et il est impossible d'obtenir la "branche" $f_1 \circ \beta$ ~~de~~ présommée en prolongeant $f_0 \circ \beta$ le long d'un facet convenable de base z_0 (où $z_0 \in \mathbb{C}^n$, $\beta(z_0) = z_0$) pour la bonne raison que :

$$\forall \gamma \in \mathcal{C}(z_0) \quad \beta \circ \gamma = \gamma^* = \{z_0\} \text{ est un point!}$$



$F \in \text{MO}(X)$
 $X =$ variété anal. connexe

$\beta: X' \rightarrow X$
 analytique
 $X' =$ variété anal. connexe

Remarque : Puisque la fonction analytique multiforme $F \circ \beta$ ne dépend pas de la branche f_0 en z_0 choisie pour la définir, il est nécessaire de faire l'hypothèse supplémentaire " β induit un homomorphisme de groupe entre les groupes fondamentaux

$$\beta: \pi^1(X', z_0) \longrightarrow \pi^1(X, z_0). \text{ On demande que cet}$$

$$\{\gamma\} \longmapsto \{\beta \circ \gamma\}$$

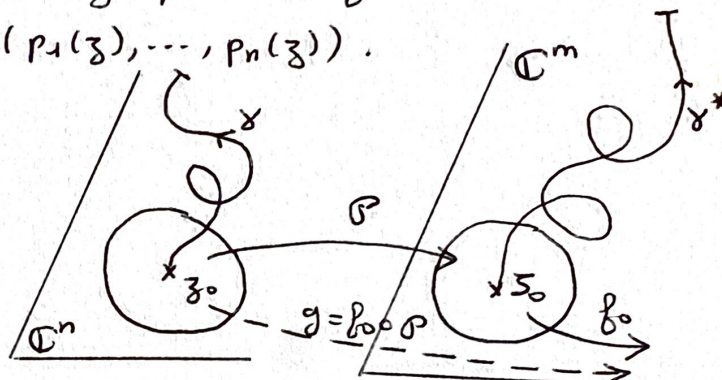
homomorphisme soit surjectif.

preuve: Notons $g(z) = f_0(\rho(z))$ pour z voisin de z_0 , et montrons que $g \in \mathcal{O}_{z_0}$ se prolonge en une fonction analytique multiforme G sur $\mathbb{C}^n \setminus q^{-1}(0)$ où $q(z) \doteq p \circ \rho(z) = p(p_1(z), \dots, p_n(z))$.

Retournons à la définition 1.2 :

Si γ est un chemin de $\mathbb{C}^n \setminus q^{-1}(0)$ d'origine z_0 , notons γ^* le chemin de $\mathbb{C}^m \setminus p^{-1}(0)$ défini par l'égalité

$$\gamma^*(t) = \rho(\gamma(t)) \quad 0 \leq t \leq 1$$



f_0 se prolonge analytiquement le long de γ^* par hypothèse, donc il existe une famille $\{\varphi_t \in \mathcal{O}_{\gamma^*(t)} \mid 0 \leq t \leq 1\}$ telle que :

$$\begin{cases} \varphi_0 = f_0 \\ \forall t \in [0, 1] \exists T \text{ voisinage de } t \quad T \subset [0, 1] \quad \exists U \subset \mathbb{C}^m \setminus p^{-1}(0) \\ \exists f \in \mathcal{O}(U) \quad \gamma^*(T) \subset U \text{ et } \rho_{\gamma^*(t)}(f) = \varphi_t \quad \forall t \in T \end{cases}$$

Notons $\Psi_t \in \mathcal{O}_{\gamma(t)}$ le germe en $\gamma(t)$ défini par $\Psi_t(z) = \varphi_t(\rho(z))$ pour tout z proche de $\gamma(t)$.

On a $\Psi_0 = g$ et si $t \in [0, 1]$ on constate que $\rho^{-1}(U)$ est un ouvert de $\mathbb{C}^n \setminus q^{-1}(0)$ et que $\gamma^*(T) \subset U \Rightarrow \gamma(T) \subset \rho^{-1}(U)$. De plus, les fonctions analytiques $f \in \mathcal{O}(U)$ nous permettent de définir $\tilde{f} \in \mathcal{O}(\rho^{-1}(U))$ en posant $\tilde{f}(z) = f(\rho(z))$ pour $z \in \rho^{-1}(U)$.

Pour $0 \leq t \leq 1$ et z voisin de $\gamma(t)$, nous avons :

$$\rho_{\gamma(t)}(\tilde{f})(z) = \tilde{f}(z) = f(\rho(z)) = \varphi_t(\rho(z)) = \Psi_t(z) \Rightarrow \rho_{\gamma(t)}(\tilde{f}) = \Psi_t$$

ce qui prouve que le germe g se prolonge analytiquement sur tout chemin γ de $\mathbb{C}^n \setminus q^{-1}(0)$ donnant naissance à une fonction analytique multi-

Pour γ , $\left\{ \begin{array}{l} \text{forme } G. \text{ Il est facile de voir que } G \text{ est indépendante des choix de } \\ \text{NB ou } z_0 \text{ et de } f_0 \text{ dans la construction précédente.} \\ \text{p62-63} \end{array} \right.$

(1) Pour tout chemin $\gamma \in \mathcal{C}(z_0, z)$ on a :

$$(g)_\gamma = \Psi_\gamma \quad \text{où} \quad \Psi_\gamma(z) = \varphi_\gamma(\rho(z)) = (f_0)_{\gamma^*(1)}(\rho(z))$$

$$\text{et } (f_0)_{\gamma^*(1)} \in S_F(\rho \circ \gamma(1)) = S_F(\rho(z))$$

donc $(g)_\gamma = (f_0)_{\gamma^*(1)} \circ \rho \in \rho^*(S_F(\rho(z)))$, ce qui prouve (1).

(2) provient de (1). En effet, si F est à détermination finie faible et si $z \in \mathbb{C}^n \setminus q^{-1}(0)$ est fixé, notons $(\varphi_1, \dots, \varphi_\ell) \subset S_F(\mathcal{P}(z))$ une base de l'espace vectoriel engendré par $S_F(\mathcal{P}(z))$ dans $\mathcal{O}_{\mathcal{P}(z)}$.

D'après (1), pour tout $h \in S_G(z)$ il existe ℓ constantes complexes $c_1, \dots, c_\ell$ telles que $h = \left(\sum_{i=1}^{\ell} c_i \varphi_i \right) \circ \mathcal{P}$.

D'où $h = \sum_{i=1}^{\ell} c_i (\varphi_i \circ \mathcal{P})$, et l'espace vectoriel engendré par $S_G(z)$ est inclus dans l'espace engendré par la famille finie $\{(\varphi_1 \circ \mathcal{P}), \dots, (\varphi_\ell \circ \mathcal{P})\}$, ce qui prouve (2).

Remarquons bien que $\dim H_G(z) \leq \dim H_F(z)$.

(3) Il nous suffit de montrer que si $F \in \mathcal{N}(\mathbb{C}^n \setminus p^{-1}(0))$, $G = \mathcal{P}^*(F)$ est à croissance temporelle.

Soit γ un chemin de $\mathbb{C}^n \setminus q^{-1}(0)$ d'origine z_0 et de rang $L(\gamma)$. γ est homotope dans $\mathbb{C}^n \setminus q^{-1}(0)$ à une ligne polygonale de rang $L(\gamma)$, et le germe $(g)_\gamma$ induit par $g \in \mathcal{O}_{z_0}$ le long de la courbe γ est le même que celui induit par g le long de la ligne polygonale (cf. Théorème de monodromie), de sorte que nous puissions supposer que γ est une ligne polygonale sans nuire à la généralité du problème.

Pour une subdivision $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_N = 1$ de $[0, 1]$, nous avons :

$$\gamma(t) \doteq \gamma_i(t) = \frac{(t_{i+1} - t)\gamma_i + (t - t_i)\gamma_{i+1}}{t_{i+1} - t_i}$$

pour tout $t_i \leq t \leq t_{i+1}$.

Notons γ_i^* le chemin image de γ_i par $\mathcal{P}$, et γ^* l'image de γ par $\mathcal{P}$.

Ainsi : $\gamma_i^*(t) = \mathcal{P}(\gamma_i(t))$ et $\gamma^*(t) = \mathcal{P}(\gamma(t))$.

et : $\gamma_i^*(t) = (p_1(\gamma(t)), \dots, p_n(\gamma(t)))$ pour $t_i \leq t \leq t_{i+1}$.

Notons $\omega = \sup \{ \deg p_i \mid 1 \leq i \leq n \}$. γ_i^* est un chemin polynomial de degré total $d(\gamma_i^*) \leq \omega + 1$, et le chemin γ^* est égal au chemin composé $\gamma_{L(\gamma)-1}^* \circ \dots \circ \gamma_0^*$, de sorte que :

$$L(\gamma^*) \leq \sum_{i=0}^{L(\gamma)-1} L(\gamma_i^*)$$

et que le théorème 2.19 montre l'existence d'un entier $\chi(\omega+1)$ tel que $L(\mu) \leq \chi(\omega+1)$ pour tous les chemins algébriques réguliers μ de $\mathbb{C}^m \setminus p^{-1}(0)$ de degré total inférieur ou égal à $\omega+1$.

Donc : $L(\gamma^*) \leq \chi(\omega+1) L(\gamma)$

En notant toujours g le germe de $G = \beta^*(F)$ en z_0 , nous aurons :

$$|(g)_\gamma(z)| = |(f_0)_{\gamma^*}(\beta(z))| \leq C_{L(\gamma^*)} \frac{(1 + |\beta(z)|)^m}{|\beta(z)|^w}$$

où $z = \gamma(1)$, puisque F est à croissance tempérée dans $\mathbb{C}^m \setminus p^{-1}(0)$. La suite $C_1, C_2, \dots$ peut être supposée croissante de sorte que l'on ait $C_{L(\gamma^*)} \leq C_{\chi(\omega+1)L(\gamma)}$. Il existe une constante $K \in \mathbb{N}$ telle que $1 + |\beta(z)| \leq K(1 + |z|)^\omega$, et en posant $C'_i = K^m C_{\chi(\omega+1)i}$ où $i \in \mathbb{N}$, nous aurons :

$$|(g)_\gamma(z)| \leq C'_{L(\gamma)} \frac{(1 + |z|)^{m\omega}}{|q(z)|^w}$$

ce qui signifie bien que G est une fonction analytique multiforme à croissance tempérée dans $\mathbb{C}^n \setminus q^{-1}(0)$.

CQFD

Remarque : Nous généralisons cette proposition pour définir l'image algébrique d'une fonction de Nilsson. La seule difficulté provient du fait que l'application polynomiale est remplacée par m fonctions algébriques qu'il faut manier avec plus de précautions.

2.21 Proposition (généralisation de la proposition 2.20)

Soient $A_i \in \mathcal{A}(\mathbb{C}^n \setminus p_i^{-1}(0))$ ($1 \leq i \leq m$) m fonctions algébriques, $z_0 \in \mathbb{C}^n \setminus (p_1 \dots p_m)^{-1}(0)$ et $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ m branches locales respectives de $A_1, \dots, A_m$.

Notons $\alpha(z) = (\alpha_1(z), \dots, \alpha_m(z))$ pour $z \in \mathbb{C}^n \setminus (p_1 \dots p_m)^{-1}(0)$ proche de z_0 et $S_0 = \alpha(z_0)$.

Il existe un polynôme q à n variables dépendant seulement de p et de α tel que, pour toute fonction $F \in H_0(\mathbb{C}^m \setminus p^{-1}(0))$ et pour $f_0 \in S_F(S_0)$, le germe $f_0(\alpha(z)) \in \mathcal{O}_{z_0}$ définit une fonction analytique multiforme G sur $\mathbb{C}^n \setminus q^{-1}(0)$.

On définit ainsi une application :

$$\alpha^*: H_0(\mathbb{C}^m \setminus p^{-1}(0)) \longrightarrow H_0(\mathbb{C}^n \setminus q^{-1}(0))$$

$$F \longmapsto G$$

qui possède les propriétés suivantes :

- (1) Si F est à détermination finie faible, $\alpha^*(F)$ l'est aussi.
- (2) $\alpha^*(\mathcal{N}(\mathbb{C}^m \setminus p^{-1}(0))) \subset \mathcal{N}(\mathbb{C}^n \setminus q^{-1}(0))$
- (3) Si l'on suppose, en outre, que les fonctions algébriques A_i sont uniformes, et si F est une fonction analytique multiforme quasi-unipotente, alors $\alpha^*(F)$ est aussi quasi-unipotente.

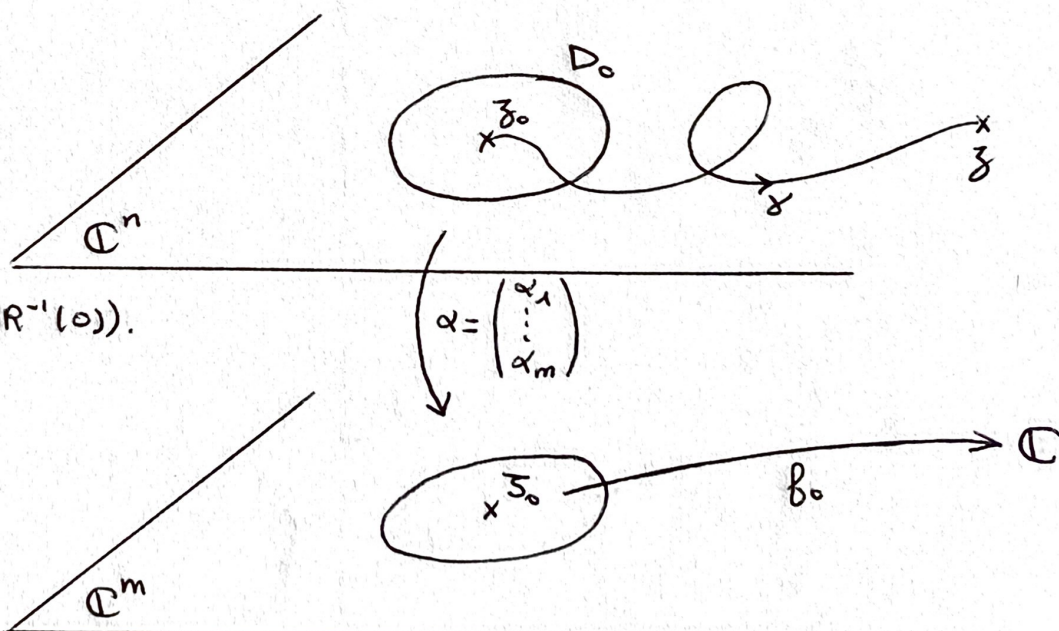
preuve :

On pose :

$$R(z) = p_1(z) \dots p_m(z)$$

de sorte que :

$$A_1, \dots, A_m \in \mathcal{A}(\mathbb{C}^n \setminus R^{-1}(0)).$$



On note $S_{A_1 \dots A_m}(z) = \{(\alpha_{1,\gamma}, \dots, \alpha_{m,\gamma}) \in \mathcal{O}_z^m / \gamma \in \mathcal{C}(z_0, z) \text{ et } \gamma \subset \mathbb{C}^n \setminus R^{-1}(0)\}$ où $\alpha_{i,\gamma} = (\alpha_i)_\gamma$ est le germe obtenu en $z = \gamma(1)$ par prolongement analytique de α_i .

L'ensemble $S_{A_i}(z) = \{\alpha_{i,\gamma} / \gamma \in \mathcal{V}(z_0, z)\}$ est un sous-ensemble fini de cardinal $\beta(A_i)$ inclus dans $\mathcal{O}_z$, pour tout $z \in \mathbb{C}^n \setminus R^{-1}(0)$, de sorte que $S_{A_1, \dots, A_m}(z) \subset S_{A_1}(z) \times \dots \times S_{A_m}(z)$ soit un sous-ensemble fini de $\mathcal{O}_z^m$ de cardinal $k \leq \beta(A_1) \dots \beta(A_m)$ pour tout $z \in \mathbb{C}^n \setminus R^{-1}(0)$.

Si $z = (z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n \setminus R^{-1}(0)$, considérons l'expression :

$$P(z_1, \dots, z_n) = \prod_{j=1}^k P(\alpha_{1,j}(z), \dots, \alpha_{m,j}(z))$$

où les m -uplets $(\alpha_{1,j}(z), \dots, \alpha_{m,j}(z))$ ($1 \leq j \leq k$) sont les éléments de $S_{A_1, \dots, A_m}(z)$. P est un polynôme symétrique en $(\alpha_{1,j}(z), \dots, \alpha_{m,j}(z))_{1 \leq j \leq k}$ et définit d'après le lemme 4.14 une fonction analytique uniforme sur $\mathbb{C}^n \setminus R^{-1}(0)$.

Comme les fonctions $A_1, \dots, A_m$ sont des fonctions algébriques régulières en dehors de $R^{-1}(0)$, $P(z)$ est à croissance tempérée, donc de la forme :

$$P(z) = \frac{B(z)}{R(z)^w} \quad \text{où } B(z) \text{ est un polynôme et } w \in \mathbb{N}.$$

Poseons $q(z) = R(z) \cdot B(z)$. Le germe $f_0(\alpha(z)) \in \mathcal{O}_{z_0}$ définit une fonction analytique multiforme G sur $\mathbb{C}^n \setminus q^{-1}(0)$.

Pour le voir, il suffit de retourner à la définition 3.2. Si γ est un chemin de $\mathbb{C}^n \setminus q^{-1}(0)$ d'origine z_0 , notons γ^* le chemin de $\mathbb{C}^m \setminus p^{-1}(0)$ défini par $\gamma^*(t) = \alpha_{\gamma_t}(\gamma(t))$, où $0 \leq t \leq 1$, et où $\alpha_{\gamma_t} = (\alpha_{1,\gamma_t}, \dots, \alpha_{m,\gamma_t})$ est le m -uplet des germes $(\alpha_1, \dots, \alpha_m)$ prolongés le long du chemin γ_t défini par $\gamma_t(\tau) = \gamma(\tau)$ pour $0 \leq \tau \leq t$.

On sait que f_0 se prolonge le long de γ^* , de sorte qu'il existe une famille $\gamma_t \in \mathcal{O}_{\gamma^*(t)}$ ($0 \leq t \leq 1$) de germes vérifiant (a) et (b) :

(a) $\gamma_0 = f_0 \in \mathcal{O}_{z_0}$

(b) $\forall \tau \in [0, 1] \quad \exists T \text{ voisinage de } \tau \quad T \subset [0, 1] \quad \exists \text{ ouvert } U \quad \gamma^*(T) \subset U \subset \mathbb{C}^m \setminus p^{-1}(0)$
 $\exists \beta \in \mathcal{O}(U) \quad \forall t \in T \quad p_{\gamma^*(t)}(\beta) = \gamma_t$

Notons $\gamma_t \in \mathcal{O}_{\gamma(t)}$ le germe en $\gamma(t)$ défini par $\gamma_t(z) = \gamma_t(\alpha_{\gamma_t}(z))$ pour z voisin de $\gamma(t)$. On a $\gamma_0 = f_0 \circ \alpha$, et si $\tau \in [0, 1]$ est fixé, il existe un voisinage $V \subset \mathbb{C}^n \setminus q^{-1}(0)$ de $\gamma(\tau)$ tel que α_{γ_τ} soit une famille de germes définis par le m -uplet $\alpha^\tau = (\alpha_1^\tau, \dots, \alpha_m^\tau)$ de fonctions holomorphes sur V . On pose alors $\tilde{\beta}(z) = \beta(\alpha^\tau(z))$ pour tout $z \in V$. $\tilde{\beta}$ est une fonction holomorphe sur V , et pour $z \in V$ assez proche de $\gamma(\tau)$:

$$p_{\gamma(\tau)}(\tilde{\beta})(z) = \tilde{\beta}(z) = \beta(\alpha^\tau(z)) = \gamma_t(\alpha_{\gamma_\tau}(z)) = \gamma_t(z)$$

donc $p_{\gamma(\tau)}(\tilde{\beta}) = \gamma_t \quad \text{CQFD}$

La démonstration précédente montre que si $F \in \mathcal{H}(\mathbb{C}^m \setminus p^{-1}(0))$, alors $g = f_0(\alpha(z))$ définit une fonction analytique multiforme G dans $\mathbb{C}^n \setminus q^{-1}(0)$.

Par construction, si γ désigne un chemin d'origine z_0 et d'extrémité z , le germe $(g)_\gamma$ induit par g en z est donné par la formule :

$$(g)_\gamma = (f_0)_{\gamma*} \circ \alpha_\gamma$$

Montrons que si F est dans la classe de Nilsson, il en est de même de G :

1° G est à détermination finie faible.

$(f_0)_{\gamma*} \in S_F(\gamma^*(1))$ s'exprime comme combinaison linéaire finie des germes $\varphi_1, \dots, \varphi_\ell$ en $\gamma^*(1)$:

$$(f_0)_{\gamma*} = \sum_{i=1}^{\ell} c_i \varphi_i$$

Où :

$$(g)_\gamma = \sum_{i=1}^{\ell} c_i (\varphi_i \circ \alpha_\gamma)$$

$S_G(z)$ est donc un espace vectoriel inclus dans l'espace vectoriel engendré par la famille finie $\{(\varphi_i \circ \alpha_{j_1, \dots, j_m}) / 1 \leq i \leq \ell \text{ et } 1 \leq j_k \in \beta(A_k)\}$ où $\alpha_{j_1, \dots, j_m} = (\alpha_{j_1}, \dots, \alpha_{j_m})$.

2° G est à croissance tempérée

Soit γ un chemin de $\mathbb{C}^n \setminus q^{-1}(0)$ d'origine z_0 et de rang $L(\gamma)$. γ est homotope dans $\mathbb{C}^n \setminus q^{-1}(0)$ à un chemin polygonal de rang $L(\gamma)$, et le théorème de monodromie précise que le germe $(g)_\gamma$ induit par $g \in \mathcal{O}_{z_0}$ le long de γ est le même que celui induit par g le long du chemin polygonal, de sorte que nous puissions supposer que γ est un chemin polygonal.

Il existe une subdivision de $[0, 1]$ $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_N = 1$, où $N = L(\gamma)$.

telle que : $t_i \leq t \leq t_{i+1}$ $\gamma(t) = \gamma_i(t) = \frac{(t_{i+1} - t)z_i + (t - t_i)z_{i+1}}{t_{i+1} - t_i}$

Soit γ_i^* le chemin de $\mathbb{C}^m \setminus p^{-1}(0)$ défini par $\gamma_i^*(t) = \alpha_{\gamma_i(t)}(\gamma_i(t))$ pour $t_i \leq t \leq t_{i+1}$. En notant $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_m)$, on a :

$$\begin{aligned} \gamma_i^* &= \alpha \circ \gamma_i : [t_i, t_{i+1}] \longrightarrow \mathbb{C}^m \\ t &\longmapsto \begin{pmatrix} \alpha_1(\gamma_i(t)) \\ \vdots \\ \alpha_m(\gamma_i(t)) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

γ_i^* est un chemin algébrique régulier de rang $d(\gamma_i^*)$:

$$d(\gamma_i^*) = \sup_{1 \leq j \leq m} d(\alpha_j \circ \gamma_i) = \sup_{1 \leq j \leq m} (\beta(A_j) + \delta(A_j)) = \sup_{1 \leq j \leq m} d(A_j)$$

$$\text{On a } \gamma^* = \gamma_{L(\gamma)-1}^* \circ \dots \circ \gamma_0^*, \text{ d'où : } L(\gamma^*) \leq \sum_{i=0}^{L(\gamma)-1} L(\gamma_i^*)$$

La proposition 2.19 montre, pour $\omega \in \mathbb{N}^*$ donné, l'existence d'un entier $X(\omega)$ tel que $L(\mu) \leq X(\omega)$ pour tout chemin algébrique régulier μ de rang total $d(\mu) \leq \omega$. Alors :

$$L(\gamma^*) \leq L(\gamma) \cdot X\left(\sup_{1 \leq j \leq m} d(A_j)\right)$$

Notons $z = \gamma(1)$. La croissance tempérée de F donne :

$$|(q)_\gamma(z)| = |(f_0)_{\gamma^*}(\alpha_\gamma(z))| \leq C_{L(\gamma^*)} \frac{(1 + |\alpha_\gamma(z)|)^{m'}}{|p(\alpha_\gamma(z))|^{w'}}$$

La suite $(C_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante, de sorte que $C_{L(\gamma^*)} \leq C'_{L(\gamma)}$ en posant $C'_{L(\gamma)} = C_{L(\gamma)} \cdot X(\sup d(A_j))$.

Pour chaque $1 \leq j \leq m$, α_j est solution de :

$$p_j(z) \alpha_j^{m_j}(z) + \dots + p_0(z) = 0$$

$$\text{donc } |\alpha_j(z)| \leq \sup \left(1, \sum_{i=0}^{m_j-1} \frac{|p_i(z)|}{|p_j(z)|} \right) \leq K_1 \frac{(1+|z|)^{m'_1}}{|R(z)|^{w_1}} \quad \text{pour des constantes (1)}$$

convenables K_1, m'_1 et w_1 , puisque $R(z) = p_1(z) \dots p_m(z)$. Il existe donc des constantes K_2, m'_2, w_2 telles que $1 + |\alpha_\gamma(z)| \leq K_2 \frac{(1+|z|)^{m'_2}}{|R(z)|^{w_2}}$

$$p(\alpha_\gamma(z)) \text{ est un facteur de } \prod_{j=1}^m p(\alpha_{1,j}(z), \dots, \alpha_{m,j}(z)) = \frac{B(z)}{R(z)^w}. \text{ Notons } p(\alpha_\gamma(z)) \cdot \varphi(z) = \frac{B(z)}{R(z)^w}.$$

$$\text{Alors } \frac{1}{|p(\alpha_\gamma(z))|} = \frac{|\varphi(z)| |R(z)|^w}{|B(z)|}, \text{ et une majoration du type (1) alliée au fait}$$

que $\varphi(z)$ est un polynôme en $\alpha_{1,j}, \dots, \alpha_{m,j}$ montre l'existence de 3 constantes K_3, m'_3, w_3 telles que $|\varphi(z)| \leq K_3 \frac{(1+|z|)^{m'_3}}{|R(z)|^{w_3}}$. Comme $q(z) = R(z) \cdot B(z)$, on conclut à l'existence de 3 constantes : $|R(z)| C''_{L(\gamma)}, m''$ et w'' telles que $|(q)_\gamma(z)| \leq C''_{L(\gamma)} \frac{(1+|z|)^{m''}}{|q(z)|^{w''}}$. Ce qui prouve (2).

3°/ Montrons que si F est quasi-unipotente et si $A_1, \dots, A_m$ sont uniformes, G est aussi quasi-unipotente. Si $\gamma \in \mathcal{C}(Z_0)$ est un chemin de $\mathbb{C}^n \setminus q^{-1}(0)$, notons γ^* le chemin de $\mathbb{C}^m \setminus p^{-1}(0)$ défini par $\gamma^*(t) = \alpha_{\gamma_t}(\gamma(t)) \doteq (\alpha_{1,\gamma_t}(\gamma(t)), \dots, \alpha_{m,\gamma_t}(\gamma(t)))$. En notant T_γ (resp. T_{γ^*}) la transformation de monodromie le long du chemin γ (resp. γ^*), on sait que :

$$T_\gamma(g) = T_{\gamma^*}(f_0) \circ T_\gamma(\alpha)$$

où $g = f_0 \circ \alpha \in \mathcal{O}_{Z_0}$.

Par l'hypothèse faite sur les fonctions algébriques A_i , $T_\gamma(\alpha) = \alpha$ et donc $T_\gamma(g) = T_{\gamma^*}(f_0) \circ \alpha$. De plus, γ^* est un lacet (ce qui n'est pas forcément vrai si α n'est pas uniforme !) et F est quasi-unipotente, donc il existe m et k tels que $(T_{\gamma^*}^m - I)^k = 0$.

On a clairement :

$$\forall g \in S_G(Z_0) \quad \exists f \in S_F(Z_0) \quad g = f \circ \alpha$$

d'où :

$$\begin{aligned} (T_\gamma^m - I)^k(g) &= \sum_{l=0}^k C_k^l T_\gamma^{ml}(g) = \sum_{l=0}^k C_k^l T_{\gamma^*}^{ml}(f) \circ \alpha \\ &= (T_{\gamma^*}^m - I)^k(f) \circ \alpha = 0 \circ \alpha = 0 \end{aligned}$$

Ce qui prouve que G est quasi-unipotente et que, si F est quasi-unipotente d'indice de nilpotence fini $\text{ind}(F)$, il en est de même de G et que $\text{ind}(G) \leq \text{ind}(F)$.

CQFD

3.

LE THEOREME D'INTEGRATION DE NILSSON

Le lemme d'évitement

3.1 Définitions : On appelle tresse la donnée de m applications continues $a_1(t), \dots, a_m(t)$ de l'intervalle $[0,1]$ dans $\mathbb{C}$ telles que :

$$\forall t \in [0,1] \quad \forall i, j \in [1, m] \quad i \neq j \quad a_i(t) \neq a_j(t)$$

Le m -uplet $(a_1(0), \dots, a_m(0))$ s'appelle l'origine de la tresse, et les applications $a_i(t)$ ($1 \leq i \leq m$) s'appellent les brins de la tresse.

On dira que la tresse $(a_1, \dots, a_m)$ évite le point $z \in \mathbb{C}$ si chacun des brins de la tresse évite z , c.à.d si

$$\forall t \in [0,1] \quad \forall i \in [1, m] \quad a_i(t) \neq z$$

La proposition suivante joue un rôle technique essentiel dans la démonstration du théorème d'intégration :

3.2 Proposition :

Soit $(a_1, \dots, a_m)$ une tresse qui évite les points 0 et 1, et dont aucune des coordonnées de l'origine appartient à l'intervalle $[0,1]$.

Il existe une déformation continue du chemin $[0,1]$ notée γ_t laissant fixe les points 0 et 1 et telle que la tresse $(a_1, \dots, a_m)$ évite les points $\gamma_t(s)$ pour $(s, t) \in [0,1]^2$. Autrement dit, il existe une application continue $\gamma : [0,1]^2 \rightarrow \mathbb{C}$ telle que :

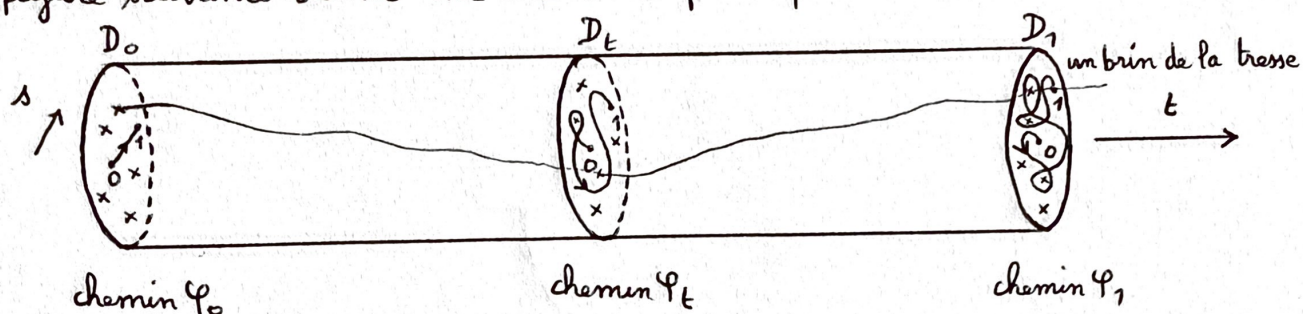
$$* \quad \forall s \in [0,1] \quad \gamma(s, 0) = s$$

$$* \quad \forall t \in [0,1] \quad \gamma(0, t) = 0 \quad \text{et} \quad \gamma(1, t) = 1$$

$$* \quad \forall s, t \in [0,1] \quad \forall i \in [1, m] \quad a_i(t) \neq \gamma_t(s) \doteq \gamma(s, t)$$

De plus, la classe d'homotopie de $\gamma_t(s)$ ne dépend que de la tresse donnée.

la figure suivante donne une idée de ce qui se passe :



Nous avons représenté un cylindre dont l'axe central est l'axe des t . Pour t fixé nous obtenons une section D_t qui n'est autre qu'un disque ouvert dans le plan complexe dont le rayon est une constante R choisie suffisamment grande pour que $|a_i(t)| < R$ pour tout $0 \leq t \leq 1$ et $i \in [1, m]$. Dans chaque disque D_t nous avons dessiné le m -uplet $(a_1(t), \dots, a_m(t))$ et noté $D_t^* = D_t \setminus \{a_1(t), \dots, a_m(t)\}$ le disque D_t épointé. Les positions des points $\{a_i(t)\}$ ont été indiquées par des croix. Les hypothèses signifient que 0 et 1 appartiennent à D_t^* pour tous les t , et que le segment réel $[0, 1] \subset D_0^*$. La conclusion de la proposition 3.2 signifie qu'il existe une famille continue de chemins $\{\varphi_t / 0 \leq t \leq 1\}$ définis par $\varphi_t(s) = \varphi(s, t)$ qui joignent 0 à 1 dans D_t^* et de chemin initial φ_0 donné par le segment $[0, 1]$ de D_0^* .

3.3. Lemme

Considérons le plan complexe épointé $\mathbb{C} \setminus \{a_1, \dots, a_m\}$ où $a_1, \dots, a_m$ sont des nombres complexes qui satisfont :

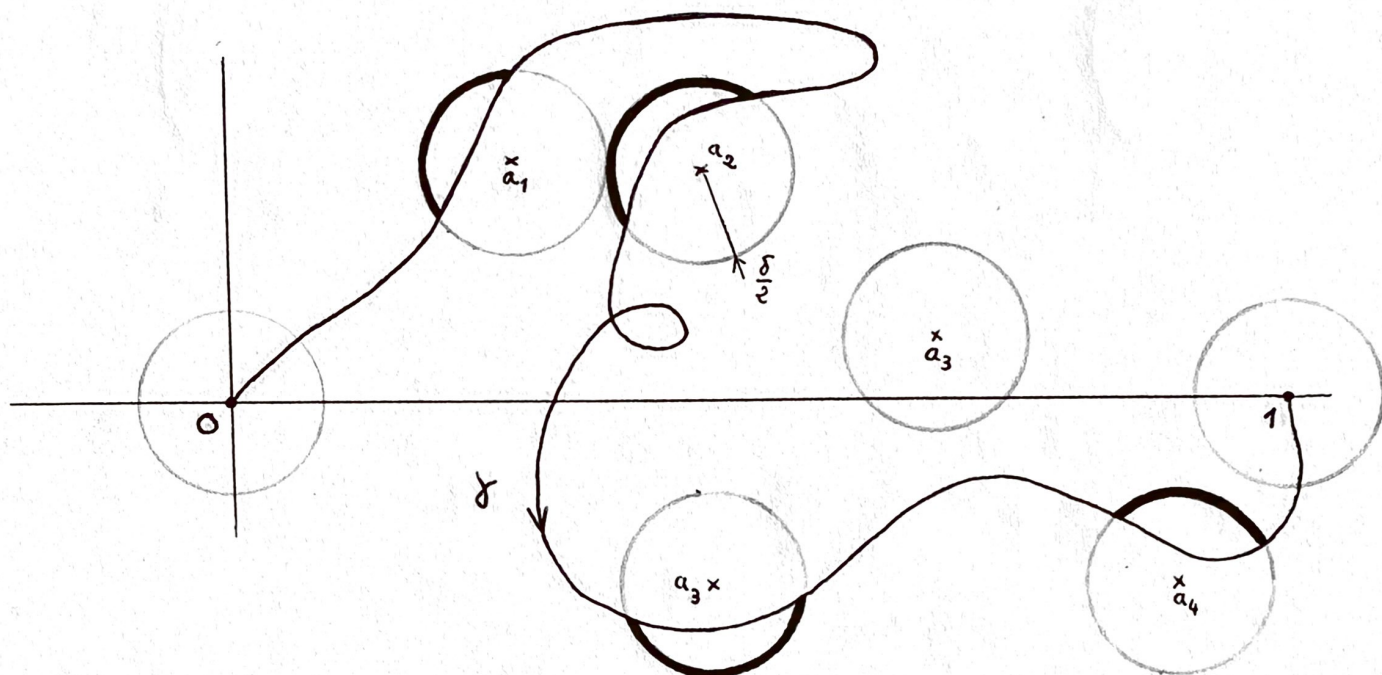
$$\begin{cases} |a_i - a_v| \geq \delta \\ |a_i| \geq \delta \\ |1 - a_i| \geq \delta \end{cases}$$

pour tout $i, v \in [1, m]$. Soit γ un chemin de $\mathbb{C} \setminus \{a_1, \dots, a_m\}$ d'origine 0 et d'extrémité 1 . Alors γ est homotope à un chemin Γ dont la distance à l'ensemble $\{a_1, \dots, a_m\}$ est supérieure à $\frac{\delta}{2}$ i.e. $|\Gamma(t) - a_i| \geq \frac{\delta}{2}$ pour tout i et $t \in [0, 1]$.

preuve :

On fait un dessin. Tous les disques $B(a_i, \frac{\delta}{2})$ sont disjoints ou tangents et le disque $B(0, \frac{\delta}{2})$ (resp. $B(1, \frac{\delta}{2})$) n'intercepte pas les disques $B(a_i, \frac{\delta}{2})$, de sorte que chaque fois que le chemin γ de $\mathbb{C} \setminus \{a_1, \dots, a_m\}$ intercepte l'un des disques $B(a_i, \frac{\delta}{2})$ $1 \leq i \leq m$

on puisse remplacer les morceaux de γ traversant le disque par un arc de la frontière de ce disque. On a le choix entre deux arcs: à chaque fois on prend celui qui est homotope à la portion de γ considérée.



3.4. Preuve de la proposition 3.2

Notons Q_T le rectangle $\{(s, t) \in \mathbb{R}^2 / 0 \leq t \leq T \text{ et } 0 \leq s \leq 1\}$, et posons :

$$J = \{T \geq 0 / \exists \varphi_T : Q_T \rightarrow \mathbb{C} \text{ continue telle que la propriété (P) soit vraie}\}$$

où

$$(P): \begin{cases} \varphi_T(s, 0) = s & \forall s \in [0, 1] \\ \varphi_T(0, t) = 0 \text{ et } \varphi_T(1, t) = 1 & \forall t \in [0, T] \\ \varphi_T(s, t) \neq a_i(t) & \forall s \in [0, 1] \quad \forall t \in [0, \inf(1, T)] \end{cases}$$

Pour montrer que $1 \in J$, il suffit de montrer qu'il existe $\sigma > 0$ tel que dès que $T \in J$ on ait $T + \sigma \in J$ car on remarque que $0 \in J$.

choix de σ

La continuité des a_i et la définition d'une tresse montrent qu'il existe un réel positif $\delta > 0$ tel que $|a_i(t) - a_v(t)| \geq \delta \quad \forall t \in [0, 1] \quad \forall i, v \quad i \neq v$.

Chaque a_i est uniformément continue sur $[0, 1]$, de sorte qu'il existe $\sigma > 0$ tel que :

$$\forall i \in [1, m] \quad |t - t'| \leq \sigma \Rightarrow |a_i(t) - a_i(t')| < \frac{\delta}{2}$$

avec ce choix de σ , montrons que $T \in J \Rightarrow T + \sigma \in J$

Soit $T \in J$. Nous avons l'existence d'une application continue $\varphi_T: Q_T \rightarrow \mathbb{C}$ vérifiant les propriétés (P). Considérons le chemin $\varphi_T(s) = \varphi(s, T)$ situé dans le disque épointé $D_T^* = D - \{a_1(T), \dots, a_m(T)\}$. D'après le lemme 3.3, il existe un chemin Γ de D_T^* qui soit homotope à φ_T dans D_T^* et dont la distance à l'ensemble $\{a_1(T), \dots, a_m(T)\}$ soit $\geq \frac{\delta}{2}$.

D'une façon plus précise, notons Φ l'homotopie faisant passer de φ_T à Γ . $\Phi: \{(s, u) / 0 \leq s, u \leq 1\} \rightarrow D_T^*$ est une fonction continue qui vérifie :

$$\begin{cases} \Phi(s, 0) = \varphi_T(s) \\ \Phi(s, 1) = \Gamma(s) \\ \Phi(0, u) = 0 \text{ et } \Phi(1, u) = 1 \end{cases}$$

L'ensemble $K = \Phi(\{(s, u) / 0 \leq s, u \leq 1\})$ est un compact inclus dans D_T^* .

Comme les a_i sont des fonctions continues, il existe $\eta > 0$ tel que :

$$\forall t \in [T, T+\eta] \quad \{a_1(t), \dots, a_m(t)\} \cap K = \emptyset$$

Poseons :

$$u(t) = 1 - \frac{T+\eta-t}{\eta} \text{ et } \chi(s, t) = \Phi(s, u(t)) \text{ pour } T \leq t \leq T+\eta$$

et définissons $\tilde{\varphi}: Q_{T+\eta} \rightarrow \mathbb{C}$

$$(s, t) \longmapsto \varphi(s, t) \text{ si } t \leq T$$

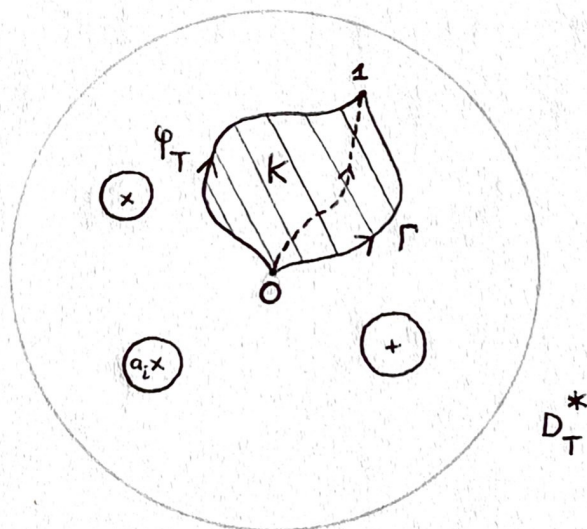
$$(s, t) \longmapsto \Phi(s, u(t)) \text{ si } T \leq t \leq T+\eta$$

$\tilde{\varphi}$ est continue et vérifie les propriétés (P), donc $T+\eta \in J$

De deux choses l'une :

ou bien $\eta \geq \sigma$, et c'est fini

ou bien $\eta < \sigma$, alors $\tilde{\varphi}(s, T+\eta) = \Gamma(s)$ et la distance du chemin Γ à $\{a_1(T), \dots, a_m(T)\}$ est $\geq \frac{\delta}{2}$. Le choix de σ montre que la courbe Γ ne rencontre pas $\{a_1(t), \dots, a_m(t)\}$ quand $t \in [T+\eta, T+\sigma]$, ce qui prouve que $T+\sigma \in J$.



montrons l'unicité de la classe d'homotopie de $\varphi_1(s)$:

Soit donc ψ une autre application vérifiant les conclusions de la proposition 3.2, montrons que les chemins $\varphi_t(s) = \varphi(s, t)$ et $\psi_t(s) = \psi(s, t)$ sont homotopes dans D_t^* pour tout $0 \leq t \leq 1$.

Notons :

$$T = \{t \in [0, 1] / \varphi_t \text{ homotope à } \psi_t \text{ dans } D_t^*\}$$

• T n'est pas vide puisque $\varphi_0(s) = \psi_0(s) = s$ pour tout $0 \leq s \leq 1$

• Montrons que T est ouvert :

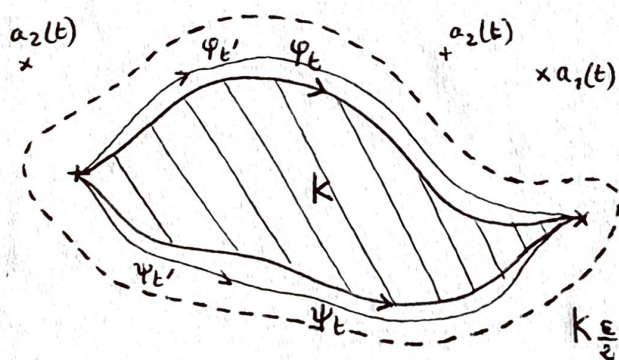
Si $t \in T$ il existe une déformation continue $A(s, u)$ définissant l'homotopie de φ_t et ψ_t .

Notons $K = A([0, 1]^2)$.

K est un compact inclus dans D_t^* et $d(K, \{a_1(t), \dots, a_m(t)\}) = \varepsilon > 0$ de sorte que l'on ait par continuité :

$$\exists \eta > 0 \quad |t' - t| < \eta \Rightarrow \begin{cases} |a_i(t) - a_i(t')| < \frac{\varepsilon}{2} \\ \forall s \in [0, 1] \quad |\varphi_t(s) - \varphi_{t'}(s)| < \frac{\varepsilon}{2} \\ \forall s \in [0, 1] \quad |\psi_t(s) - \psi_{t'}(s)| < \frac{\varepsilon}{2} \end{cases} \quad (I)$$

et $K_{\frac{\varepsilon}{2}} \cap \{a_1(t'), \dots, a_m(t')\} = \emptyset$ en notant $K_{\frac{\varepsilon}{2}} = \{z \in \mathbb{C} / d(z, K) \leq \frac{\varepsilon}{2}\}$



Le chemin $\varphi_{t'}$ (resp. $\psi_{t'}$) est homotope au chemin φ_t dans D_t^* (resp. ψ_t) puisque

$\varphi_{t'}$ a son image incluse dans $\{z / d(z, \varphi_t([0, 1])) < \frac{\varepsilon}{2}\}$ de sorte que :

$\varphi_{t'} \sim \varphi_t$ et $\psi_{t'} \sim \psi_t$ donc $\varphi_{t'} \sim \psi_{t'}$ dans $D_{t'}^*$, donc $|t' - t| < \eta \Rightarrow t' \in T$

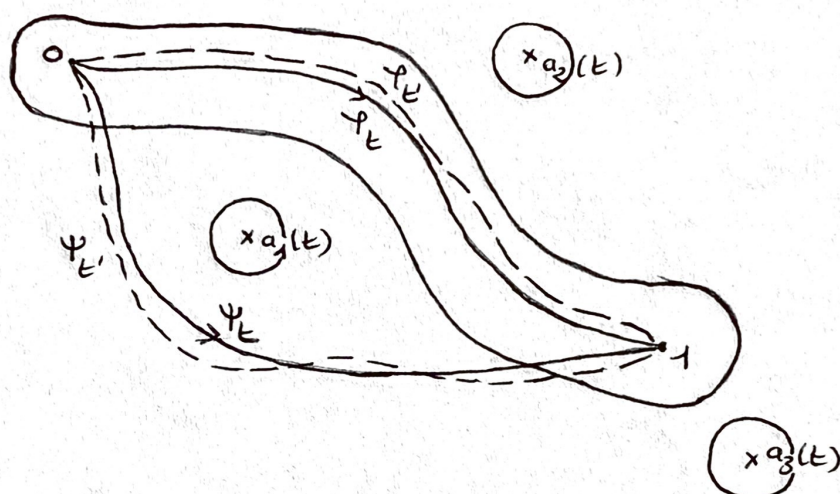
• Montrons que T est fermé :

Si $t \notin T$, φ_t n'est pas homotope à ψ_t dans D_t^* . Si ε désigne la distance > 0 du compact $\varphi_t([0, 1]) \cup \psi_t([0, 1])$ à l'ensemble $\{a_1(t), \dots, a_m(t)\}$ nous pouvons toujours écrire l'affirmation (I).

Si $|t' - t| < \eta$ et si $\varphi_{t'} \sim \varphi_t$ dans $D_{t'}^*$, en faisant intervenir l'ensemble $\{z \in \mathbb{C} / d(z, \varphi_t([0,1]) < \frac{\varepsilon}{2}\}$ dans $D_{t'}^*$, pour tout t' vérifiant $|t' - t| < \eta$, on constate comme précédemment que $\varphi_{t'} \sim \varphi_t$ dans $D_{t'}^*$.

De la même manière $\varphi_{t'} \sim \varphi_t$ dans $D_{t'}^*$ donc $\varphi_t \sim \varphi_{t'}$ dans D_t^* , ce qui est absurde.

Finalement $T = [0,1]$ et la proposition 3.2 est démontrée.



3.5 Exemple

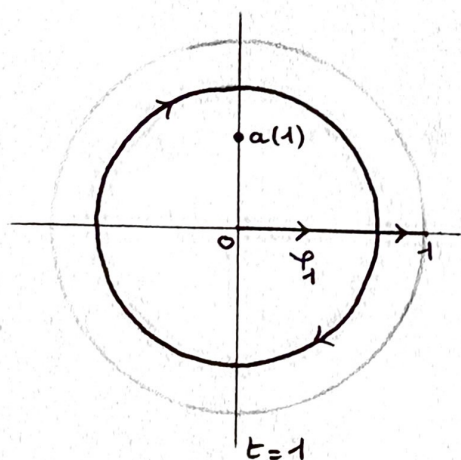
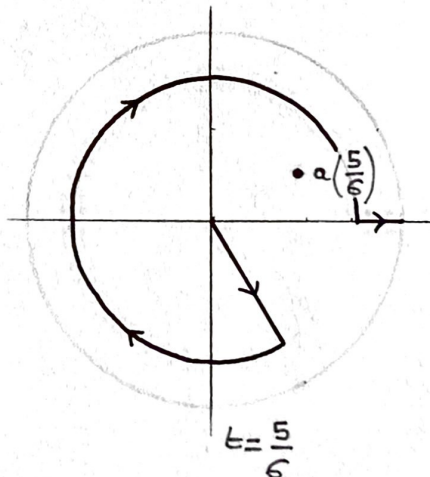
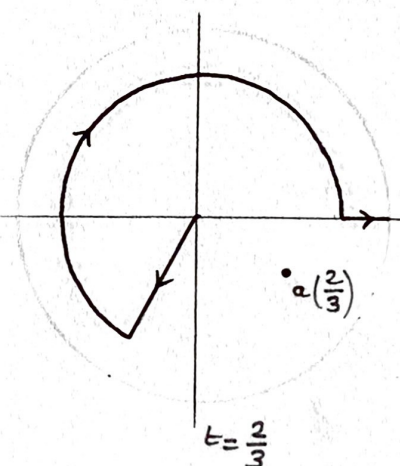
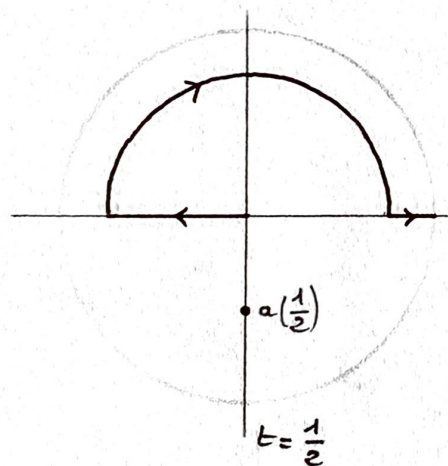
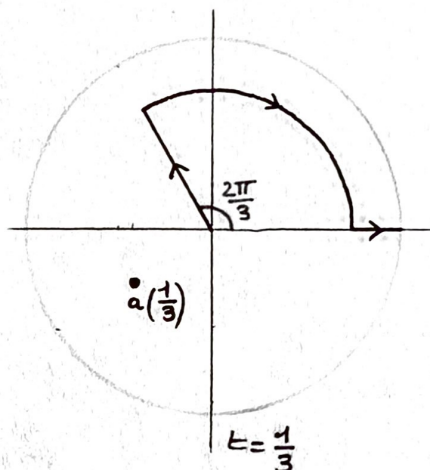
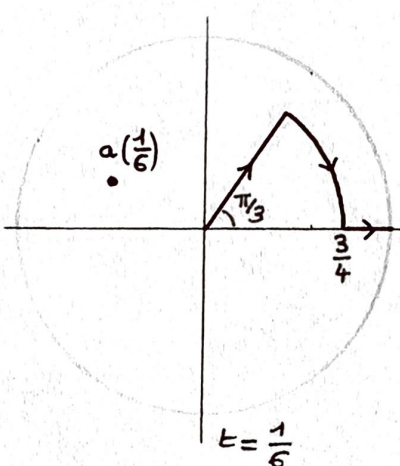
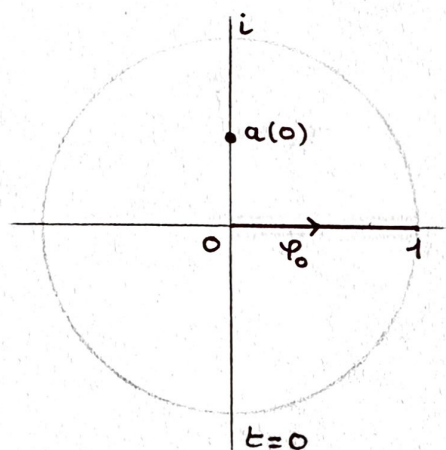
Prendons $n=1$ et $a_1(t) = \frac{i}{2} e^{i2\pi t} \doteq a(t)$. On peut définir l'application φ par :

$$\varphi(s, t) = \begin{cases} s e^{i2\pi t} & \text{si } 0 \leq s \leq \frac{3}{4} \\ \frac{3}{4} e^{i2\pi t(7-8s)} & \text{si } \frac{3}{4} \leq s \leq \frac{7}{8} \\ \frac{3}{4} + 2\left(s - \frac{7}{8}\right) & \text{si } \frac{7}{8} \leq s \leq 1 \end{cases}$$

Il est clair que $\varphi(s, t) \neq a(t)$ pour tous les couples (s, t) , et que $\varphi(0, t) = 0$ et $\varphi(1, t) = 1$ pour tous les $t \in [0, 1]$.

Le chemin $\varphi_0(s) = \varphi(s, 0) = s$ pour $0 \leq s \leq \frac{3}{4}$, puis reste constant pour $\frac{3}{4} \leq s \leq \frac{7}{8}$, et croît finalement de $\frac{3}{4}$ à 1 lorsque $\frac{7}{8} \leq s \leq 1$. Ainsi, mis à part la paramétrisation qui ne change pas la classe d'homotopie, nous voyons que φ_0 est homotope au chemin $s \mapsto s$.

Pour $t \in]0, 1]$, le chemin $\gamma_t(s)$ est plus compliqué. Il joint tout d'abord 0 à $\frac{3}{4} e^{i2\pi t}$ par un segment de droite, puis lorsque $\frac{3}{4} \leq s \leq \frac{7}{8}$, $\gamma_t(s)$ parcourt l'arc de cercle de centre 0 et de rayon $\frac{3}{4}$ dans le sens négatif jusqu'au point $\frac{3}{4}$. Enfin $\gamma_t(s)$ parcourt le segment $[\frac{3}{4}, 1]$ lorsque $\frac{7}{8} \leq s \leq 1$.
Faisons les dessins de quelques positions intermédiaires :



Nous voyons sur cet exemple que le chemin γ_1 n'est pas homotope au chemin γ_0 dans $\mathbb{C} \setminus \{a(0)\}$ (même si $a(0) = a(1)$).

Conservons les hypothèses et les notations de 3.2

3.6. proposition

Supposons qu'il existe un ensemble fini de points $0 < \theta_1 < \dots < \theta_R < 1$ tels que toutes les images des applications $a_1(t), \dots, a_m(t)$ soient en dehors de l'intervalle $[0, 1]$, sauf quand $t \in \{\theta_1, \dots, \theta_R\}$. Alors on a :

$$L(\varphi_1) \leq 4km + 1$$

L'hypothèse ci dessus s'écrit aussi $[0, 1] \subset D_t^*$ pour tout $t \in [0, 1] \setminus \{\theta_1, \dots, \theta_R\}$. Nous avons besoin de quelques préliminaires avant d'aborder la preuve de la proposition 3.6 qui est reportée à la section 3.11.

3.7. les nombres $p(\gamma)$

Considérons l'ensemble $D^* = \mathbb{C} \setminus \{\alpha_1, \dots, \alpha_m\}$ où nous supposons qu'aucun des points $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ appartient à $[0, 1]$.

Le groupe fondamental $\pi_1(D^*)$ est un groupe libre engendré par m éléments représentés par m lacets simples $\mathcal{L}_1, \dots, \mathcal{L}_m$ où $\mathcal{L}_i$ est d'indice 1 par rapport à α_i et 0 par rapport aux autres points α_j restant. Nous pouvons de plus supposer que $\mathcal{L}_i(0) = \mathcal{L}_i(1) = 1$ et $\mathcal{L}_i \in \mathcal{C}(1)$ pour $1 \leq i \leq m$.

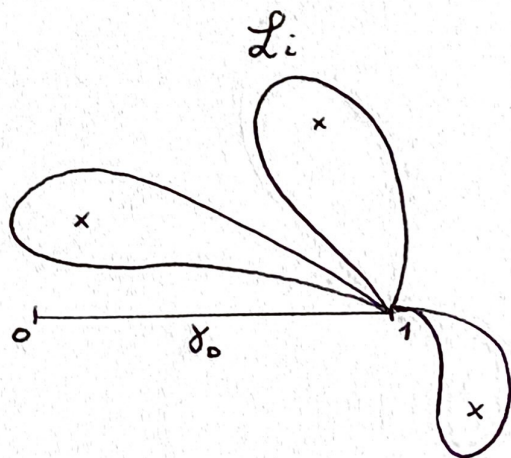
Tout élément de $\pi_1(D^*)$ s'écrit comme produit d'éléments $\{\mathcal{L}_1, \dots, \mathcal{L}_m, \mathcal{L}_1^{-1}, \dots, \mathcal{L}_m^{-1}\}$.

Il est clair que tout chemin $\gamma \in \mathcal{C}(0, 1)$ de D^* est homotope à un chemin du type $\mathcal{L}_0 \gamma_0$ où γ_0 est le segment joignant 0 à 1 et où $\mathcal{L}$ est un lacet d'origine 1.

On prend tout simplement :

$$\mathcal{L} = \gamma_0 \gamma_0^{-1}$$

Nous pouvons énoncer la définition suivante :



3.8. Définition

Soit $\gamma \in \mathcal{B}(0,1)$, alors $\{\gamma\} = \{\mathcal{L} \circ \gamma_0\}$ où $\mathcal{L}$ est un lacet d'origine 1.

On appelle poids du chemin γ et on note $g(\gamma)$ le plus petit entier positif k tel que $\{\mathcal{L}\}$ puisse être représenté par un produit de k facteurs du type: $\{\mathcal{L}_i\}$ ou $\{\mathcal{L}_i^{-1}\}$ où $1 \leq i \leq m$.

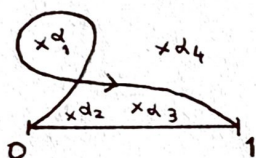
ainsi $\{\mathcal{L}\} = \{\mathcal{L}_{i_1}\} \circ \dots \circ \{\mathcal{L}_{i_{g(\gamma)}}\}$ où $\mathcal{L}_{i_j} \in \{\mathcal{L}_1, \dots, \mathcal{L}_m, \mathcal{L}_1^{-1}, \dots, \mathcal{L}_m^{-1}\}$

Nous avons alors la majoration suivante de $L(\gamma)$

3.9. Lemme

$$\forall \gamma \in \mathcal{B}(0,1) \quad L(\gamma) \leq 4g(\gamma) + 1 \quad (\text{dans } D^* = \mathbb{C} - \{\alpha_1, \dots, \alpha_m\})$$

preuve:



$\gamma \in \mathcal{B}(0,1)$ et son image est dans D^* .

$\gamma = \mathcal{L} \circ \gamma_0$ donc d'après 2.3 :

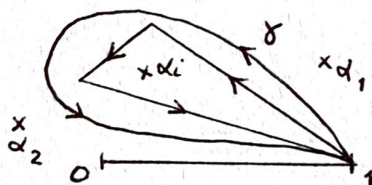
$$L(\gamma) \leq L(\mathcal{L}) + L(\gamma_0)$$

or $L(\gamma_0) = 1$ et $\{\mathcal{L}\} = \{\mathcal{L}_{i_1}\} \circ \dots \circ \{\mathcal{L}_{i_{g(\gamma)}}\}$ où $\mathcal{L}_{i_j} \in \{\mathcal{L}_1, \dots, \mathcal{L}_m^{-1}\}$ par définition de $g(\gamma)$ donc (2.3) :

$$L(\gamma) \leq \sum_{j=1}^{g(\gamma)} L(\mathcal{L}_{i_j}) + 1$$

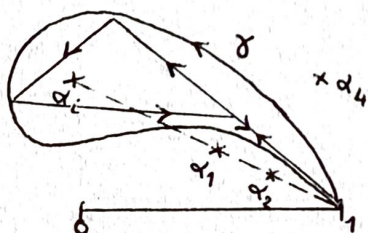
Montrons que $L(\mathcal{L}_i) \leq 4 \quad \forall i \in [1, m]$ de sorte que l'on obtienne la majoration voulue. Prenons $L(\mathcal{L}_i)$, deux cas sont possibles :

* Si $[1, \alpha_i[\subset \mathbb{C} \setminus \{\alpha_1, \dots, \alpha_m\}$. $\mathcal{L}_i$ est homotope à un triangle



$$\text{donc } L(\mathcal{L}_i) = 3$$

* Sinon il existe une droite passant par 1 qui ne rencontre pas $\{\alpha_1, \dots, \alpha_m\}$ et un point p de cette droite tel que la droite $(p\alpha_i)$ ne rencontre pas $\{\alpha_1, \dots, \alpha_i, \dots, \alpha_m\}$ et on est ramené au cas précédent :



$$\text{donc } L(\mathcal{L}_i) = 4$$

L'inégalité du lemme 3.9 sera utilisée pendant la preuve de la proposition 3.6 car il est plus facile d'étudier le nombre $g(\gamma)$ que $L(\gamma)$.

Le lemme qui suit précise le comportement de $g(\gamma)$ lorsque le m -uplet $(\alpha_1, \dots, \alpha_m)$ varie continuellement.

3.10. Lemme

Soient $a_1(t), \dots, a_m(t)$ une tresse à m brins qui évite les points d'un chemin $\gamma \in \mathcal{C}(0,1)$.

- Si cette tresse évite les points de $[0,1]$ la fonction $t \mapsto g_t(\gamma)$ définie sur $[0,1]$ est constante.
- S'il existe $\theta \in]0,1[$ tel que l'ensemble $\{a_1(\theta), \dots, a_m(\theta)\} \cap [0,1]$ soit de cardinal $s > 0$ et tel que $a_i(t) \notin [0,1]$ pour tout $t \in [0,1] \setminus \{\theta\}$ et tout $i \in [1,m]$, alors :

$$|g_1(\gamma) - g_0(\gamma)| \leq s$$

preuve :

- On montre que la fonction $t \mapsto g_t(\gamma)$ qui est à valeurs entières est localement constante sur $[0,1]$.

Soit $t_0 \in [0,1]$ fixé. $\gamma = \mathcal{L} \circ \gamma_0$ où $\mathcal{L}$ s'exprime en fonction de $g_{t_0}(\gamma)$ éléments de l'ensemble $\{\mathcal{L}_1, \dots, \mathcal{L}_m, \mathcal{L}_1^{-1}, \dots, \mathcal{L}_m^{-1}\}$ qui engendrent $\pi_1(D_{t_0}^*)$. Notons :

$$\{\mathcal{L}\} = \{\mathcal{L}_{i_1}\} \circ \dots \circ \{\mathcal{L}_{i_{g_{t_0}(\gamma)}}\} \quad \text{où } \mathcal{L}_{i_j} \in \{\mathcal{L}_1, \dots, \mathcal{L}_m^{-1}\}$$

L'ensemble $K =: \mathcal{L}_1([0,1]) \cup \dots \cup \mathcal{L}_m^{-1}([0,1])$ est un compact qui ne rencontre pas $\{a_1(t_0), \dots, a_m(t_0)\}$. Par continuité des fonctions a_i , il existe $\eta > 0$ tel que $K \cap \{a_1(t), \dots, a_m(t)\} = \emptyset$ dès que $|t - t_0| < \eta$. De sorte que, si $|t - t_0| < \eta$ chacun des chemins $\mathcal{L}_1, \dots, \mathcal{L}_m$ de $D_{t_0}^*$ soit encore un chemin de D_t^* . $\{\mathcal{L}_1, \dots, \mathcal{L}_m\}$ est encore un système

générateur de $\pi_1(D_t^*)$ et l'égalité: $\{\mathcal{L}\} = \{\mathcal{L}_{i_1}\} \circ \dots \circ \{\mathcal{L}_{i_{k_0}}(\gamma)\}$ montre que: $\mathcal{P}_t(\gamma) \leq \mathcal{P}_{t_0}(\gamma)$. Par le même raisonnement on a $\mathcal{P}_{t_0}(\gamma) \leq \mathcal{P}_t(\gamma)$ donc $\mathcal{P}_t(\gamma) = \mathcal{P}_{t_0}(\gamma)$ pour $|t - t_0| < \eta$

ce qui prouve a).

b) Nous pouvons supposer que $0 < a_1(\theta) < \dots < a_s(\theta) < 1$ et que les points restants $a_{s+1}(\theta), \dots, a_m(\theta)$ sont en dehors de $[0, 1]$.

Par continuité $\operatorname{Im} a_i(t) \neq 0$ pour tout $1 \leq i \leq s$ et pour t voisin de θ . En particulier nous pouvons trouver δ_0 assez petit pour que l'on ait simultanément:

- le signe de $\operatorname{Im} a_i(\theta - \delta)$ est constant et égal à ε_i lorsque δ varie dans $]0, \delta_0]$.
- $\mathcal{P}_1(\gamma) - \mathcal{P}_0(\gamma) = \mathcal{P}_{\theta+\delta}(\gamma) - \mathcal{P}_{\theta-\delta}(\gamma)$ pour $\delta \in]0, \delta_0]$.

la dernière assertion vient du fait que d'après a) la fonction $t \mapsto \mathcal{P}_t(\gamma)$ est constante sur $[0, \theta[$ et $]\theta, 1]$.

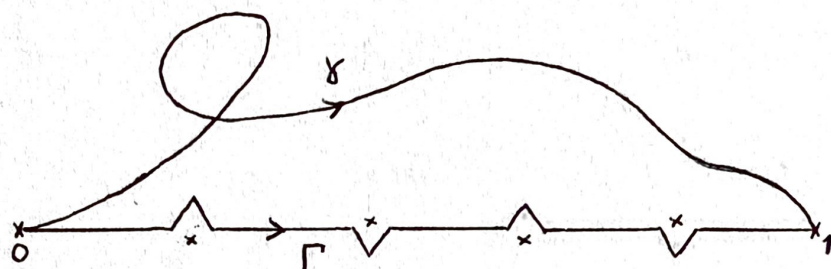
Nous obtenons les signes $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_s$. De la même manière, notons $\hat{\varepsilon}_1, \dots, \hat{\varepsilon}_s$ les signes de $\operatorname{Im} a_i(\theta + \delta)$ lorsque $\delta \in [0, \delta_0[$. Notons ω le nombre d'indices $1 \leq i \leq s$ pour lesquels les signes ε_i et $\hat{\varepsilon}_i$ sont différents. $\omega \leq s$ et le lemme 3.10 provient du résultat suivant, plus précis:

$$(1) \quad |\mathcal{P}_{\theta+\delta}(\gamma) - \mathcal{P}_{\theta-\delta}(\gamma)| \leq \omega \text{ pour } \delta \text{ assez petit}$$

Montrons (1):

γ_0 désigne toujours le segment $[0, 1]$ parcouru de 0 à 1.

Nous allons tout d'abord déformer γ_0 et introduire le chemin $\Gamma \in \mathcal{C}(0, 1)$ comme sur la figure qui suit:



Γ est une ligne brisée de 0 à 1, construite en faisant de petits triangles aux points $a_1(\theta), \dots, a_s(\theta)$, et en prenant garde de tracer ces triangles dans $\{z/\operatorname{Im} z > 0\}$ lorsque $\varepsilon_i = -1$ et dans $\{z/\operatorname{Im} z < 0\}$ lorsque $\varepsilon_i = +1$. Nous avons représenté les positions de $a_1(\theta - \delta), \dots, a_m(\theta - \delta)$ par des petites croix.

Avec ce choix de Γ , il est clair que γ_0 et Γ sont homotopes dans $D_{\theta-\delta}^*$ lorsque $0 < \delta \leq \delta_0$. Les chemins $\gamma_0 \gamma_0^{-1}$ et $\gamma_0 \Gamma^{-1}$ sont donc aussi homotopes dans $D_{\theta-\delta}^*$ et le poids du lacet $\gamma_0 \gamma_0^{-1}$ noté $\rho_{\theta-\delta}(\gamma)$, sera égal au poids de $\gamma_0 \Gamma^{-1}$ dans $D_{\theta-\delta}^*$.

Conservons Γ fixe. Le chemin $\gamma_0 \Gamma^{-1}$ évite tous les points $\{a_1(t), \dots, a_m(t)\}$ lorsque t varie dans un intervalle de centre θ et de rayon $\delta_1 < \delta_0$ assez petit. Le lemme 3.11 montre que l'application :

$$\begin{array}{ccc}]\theta - \delta_1, \theta + \delta_1[& \longrightarrow & \mathbb{Z} \\ t & \longmapsto & \rho_t(\gamma_0 \Gamma^{-1}) \end{array} \quad \text{est constante}$$

En particulier, si $0 < \delta \leq \delta_1$:

$$\rho_{\theta-\delta}(\gamma) = \rho_{\theta-\delta}(\gamma_0 \Gamma^{-1}) = \rho_{\theta+\delta}(\gamma_0 \Gamma^{-1})$$

où $\rho_{\theta+\delta}(\gamma_0 \Gamma^{-1})$ est le poids du chemin $\gamma_0 \Gamma^{-1}$ dans $D_{\theta+\delta}^*$ et $\rho_{\theta+\delta}(\gamma)$ est le poids du chemin $\gamma_0 \gamma_0^{-1}$ dans $D_{\theta+\delta}^*$.

Si $0 < \delta \leq \delta_1$, $\gamma_0 \gamma_0^{-1} \sim (\gamma_0 \Gamma^{-1}) \circ (\Gamma \circ \gamma_0^{-1})$ dans $D_{\theta+\delta}^*$ on en déduit :

$$\rho_{\theta+\delta}(\gamma) \leq \rho_{\theta-\delta}(\gamma) + \rho_{\theta+\delta}(\Gamma \circ \gamma_0^{-1}) \quad (2)$$

À ce stade retournons à la figure. La définition de ω et la construction de Γ montrent que le lacet $\Gamma \circ \gamma_0^{-1}$ a un indice égal à 1 par rapport aux points $a_i(\theta + \delta)$ pour lesquels $\varepsilon_i \neq \hat{\varepsilon}_i$, et un indice nul par rapport aux autres points $a_i(\theta + \delta)$ restant. ainsi : $\rho_{\theta+\delta}(\Gamma \circ \gamma_0^{-1}) = \omega$ et (2) donne :

$$\rho_{\theta+\delta}(\gamma) \leq \rho_{\theta-\delta}(\gamma) + \omega$$

On obtient l'inégalité $\rho_{\theta-\delta}(\gamma) \leq \rho_{\theta+\delta}(\gamma) + \omega$ par un raisonnement analogue.

C.Q.F.D.

3.11. preuve de la proposition 3.6

Soit φ une application de $[0,1] \times [0,1]$ dans $\mathbb{C}$ vérifiant les conclusions de la proposition 3.2.

Montrons d'abord qu'il existe une subdivision $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_N = 1$ de $[0,1]$ telle que les chemins $\varphi_t(s)$ aient une image incluse dans D_u^* pour tous t et u tels que $t_v \leq t \leq t_{v+1}$ et $t_v \leq u \leq t_{v+1}$ pour tout $0 \leq v \leq N-1$.

En effet :

φ est uniformément continue sur $[0,1]^2$ donc :

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \eta > 0 \quad |t - t'| < \eta \Rightarrow \forall s \in [0,1] \quad |\varphi(t',s) - \varphi(t,s)| < \frac{\varepsilon}{2}$$

choisissons

$$\varepsilon = (\text{distance de l'image de } \varphi_t \text{ à } \{a_1(t), \dots, a_m(t)\}) > 0$$

les fonctions a_i étant uniformément continues on peut choisir η pour avoir :

$$|t - t'| < \eta \Rightarrow \forall s \in [0,1] \quad |\varphi(t',s) - \varphi(t,s)| < \frac{\varepsilon}{2} \text{ et } |a_i(t) - a_i(t')| < \frac{\varepsilon}{2} \\ 1 \leq i \leq m$$

donc

$$|t - t'| < \eta \text{ et } |u - t| < \eta \Rightarrow \varphi_{t'}([0,1]) \subset D_u^*$$

Il suffit alors de recouvrir $[0,1]$ des intervalles de centre t et de rayon η , et d'en extraire un sous-recouvrement fini dont on reordonnera les extrémités pour obtenir la subdivision cherchée.

Nous pouvons considérer une partition $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_N = 1$ qui vérifie en plus les propriétés suivantes :

$$* \theta_i \neq t_v \quad \forall i \in [1, k] \quad \forall v \in [0, N]$$

* Chaque intervalle $]t_v, t_{v+1}[$ possède au plus un point θ_i $1 \leq i \leq k$

Il y a k "intervalles critiques" $J_1, \dots, J_k$ où :

$$J_i =]t_{v(i)}, t_{v(i)+1}[\text{ et } t_{v(i)} < \theta_i < t_{v(i)+1}$$

pour simplifier les notations, posons

$$\varphi_v =: \varphi_{t_v} \quad \text{pour } 0 \leq v \leq N-1$$

φ_v est donc un chemin dans $D_v^* =: \mathbb{C} \setminus \{a_1(t_v), \dots, a_m(t_v)\}$
 à chaque entier v nous pouvons associer le poids $\rho(\varphi_v)$

sous lemme 1 - Pour chaque v , nous pouvons aussi considérer φ_v comme un chemin de D_{v+1}^* , et ce chemin est homotope au chemin φ_{v+1} dans D_{v+1}^*
 preuve:

l'image de φ_v est incluse dans D_{v+1}^* car nous avons choisi une partition assez fine pour cela. La déformation continue $(s, w) \mapsto \varphi(s, t_v + w t_{v+1})$ définit l'homotopie de D_{v+1}^* qui transforme φ_v en φ_{v+1} .

Il résulte du sous-lemme 1 que $\rho(\varphi_{v+1})$ est le poids de φ_v dans D_{v+1}^* et ce nombre se calcule en gardant le chemin φ_v fixe et en faisant varier le m -uplet $(a_1(t), \dots, a_m(t))$ pour $t_v \leq t \leq t_{v+1}$

• le lemme 3.11 montre que:

si $[t_v, t_{v+1}]$ n'est pas un intervalle critique $\rho(\varphi_v) = \rho(\varphi_{v+1})$

• le lemme 3.13 montre que:

si $[t_v, t_{v+1}]$ est un des intervalles critiques J_i alors:

$$|\rho(\varphi_{v(i)}) - \rho(\varphi_{v(i)+1})| \leq m$$

ceci pour tout $1 \leq i \leq k$

Finalement l'inégalité triangulaire donne:

$$|\rho(\varphi_1) - \rho(\varphi_0)| \leq km$$

mais $\rho(\varphi_0) = 0$ puisque $\rho(\varphi_0)$ est le poids du lacet $\gamma_0 \circ \gamma_0^{-1}$ homotope à l'identité de $\pi_1(D_0^*)$ d'où:

$$\rho(\varphi_1) \leq km$$

il me reste plus qu'à appliquer le lemme 3.9 qui donne:

$$L(\varphi_1) \leq 4km + 1$$

C.Q.F.D.

3.12 généralisation:

Si φ_0 est un chemin d'origine 0 et d'extrémité 1 de $D_0^* = \mathbb{C} \setminus \{a_1(0), \dots, a_m(0)\}$ la proposition 3.2 reste vraie. Avec les hypothèses de la proposition 3.6 on a toujours $|\rho(\varphi_1) - \rho(\varphi_0)| \leq km$ mais cette inégalité donne alors:

$$L(\varphi_1) \leq 4km + 1 + 4\rho(\varphi_0)$$

Intégration d'un germe le long d'un chemin

3.13 Définition : Intégration d'un germe de fonction analytique prolongeable dans $\mathbb{C} \setminus \Sigma$ le long d'un chemin de $\mathbb{C} \setminus \Sigma$ (où Σ désigne un sous-ensemble fini de $\mathbb{C}$)

Soit $f_0 \in \mathcal{O}_{z_0}$ un germe en $z_0 \in \mathbb{C} \setminus \Sigma$ se prolongeant le long de tout chemin de $\mathbb{C} \setminus \Sigma$, et soit $\gamma \in \mathcal{C}(z_0, z_1)$ un chemin différentiable par morceaux contenu dans $\mathbb{C} \setminus \Sigma$.

Nous posons par définition et avec les notations de 1.1 :

$$\int_{\gamma} f_0(y) dy \doteq \sum_{i=0}^{n-1} \int_{\gamma_i} F_i(z) dz$$

$$\text{où } \gamma_i : [t_i, t_{i+1}] \longrightarrow \Omega_i \quad \text{et } F_i \in \mathcal{O}(\Omega_i). \\ t \longmapsto \gamma(t)$$

Cette définition est licite car l'intégrale apparaissant au second membre est indépendante de la subdivision $(t_i)_{0 \leq i \leq n}$, des ouverts Ω_i et des fonctions $F_i \in \mathcal{O}(\Omega_i)$ intervenant dans la définition 1.1.

La proposition 3.14 montre qu'il est possible d'étendre la définition de l'intégrale $\int_{\gamma} f_0(y) dy$ à n'importe quel chemin γ de $\mathbb{C} \setminus \Sigma$ en posant :

$$\int_{\gamma} f_0(y) dy = \int_{\pi} f_0(y) dy$$

où π est un chemin différentiable par morceaux homotope à γ à extrémités fixes dans $\mathbb{C} \setminus \Sigma$.

Exemple :

Soient $C_{\frac{1}{4}}$ et $C_{\frac{1}{2}}$ les cercles de centre O et de rayons respectifs $\frac{1}{4}$ et $\frac{1}{2}$ parcourus une fois dans le sens direct.

$f(z) = \sqrt{z}$ est une fonction analytique multiforme sur $\mathbb{C}^*$ dont une détermination

dans $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-^*$ est $F_0(z) = |z|^{\frac{1}{2}} e^{\frac{i}{2} \arg z}$ où $-\pi < \arg z < \pi$

Notons f_0 le germe induit par F_0 au point $\frac{1}{4}$ et au point $\frac{1}{2}$ (abus d'écriture).

Un calcul direct montre que :

$$\int_{C_{\frac{1}{4}}} f(z) dz = \int_0^{2\pi} \left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{1}{2}} e^{\frac{i\theta}{2}} \frac{1}{4} i e^{i\theta} d\theta = \frac{i}{8} \int_0^{2\pi} e^{\frac{3i\theta}{2}} d\theta = \frac{i}{8} \left(\frac{4i}{3}\right) = -\frac{1}{6}$$

$$\int_{C_{\frac{1}{2}}} f(z) dz = \int_0^{2\pi} \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}} e^{\frac{i\theta}{2}} \frac{1}{2} i e^{i\theta} d\theta = \frac{i}{2\sqrt{2}} \int_0^{2\pi} e^{\frac{3i\theta}{2}} d\theta = -\frac{\sqrt{2}}{3}$$

Ce qui prouve que 2 lacets peuvent être homotopes comme lacets dans $\mathbb{C} \setminus \Sigma$ sans que les intégrales d'un "même" germe le long de ces 2 lacets coïncide. Le théorème de Cauchy n'est pas applicable sous cette forme. Cependant, nous pouvons montrer la proposition suivante :

3.14 Proposition : Si γ et δ sont 2 chemins différentiables par morceaux de $\mathbb{C} \setminus \Sigma$ d'origine z_0 et d'extrémité z_1 , homotopes à extrémités fixes dans $\mathbb{C} \setminus \Sigma$, et si $f_0 \in \mathcal{O}_{z_0}$ est un germe de fonction analytique en z_0 prolongeable le long de tout chemin de $\mathbb{C} \setminus \Sigma$, alors :

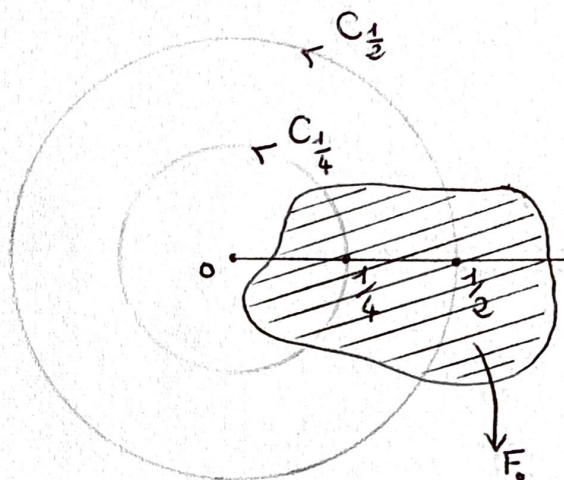
$$\int_{\gamma} f_0(y) dy = \int_{\delta} f_0(y) dy$$

preuve :

Notons Φ l'homotopie de γ à δ .

$$\begin{array}{ccc} \Phi : [0,1] \times [0,1] & \longrightarrow & \mathbb{C} \setminus \Sigma \\ (\lambda, t) & \longmapsto & \Phi(\lambda, t) \end{array} \quad \text{est continue}$$

$$\begin{cases} \Phi(0, t) = \gamma(t) \\ \Phi(1, t) = \delta(t) \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} \Phi(\lambda, 0) = z_0 \\ \Phi(\lambda, 1) = z_1 \end{cases}$$



L'ensemble $K \doteq \Phi([0,1]^2)$ est un compact inclus dans $\mathbb{C} \setminus \Sigma$ et nous pouvons trouver un recouvrement fini de K formé de boules ouvertes D_k incluses dans $\mathbb{C} \setminus \Sigma$. Il existe alors $\epsilon > 0$ tel que pour tout $z \in K$ il existe k tel que la boule ouverte de centre z et de rayon ϵ soit incluse dans D_k .

Comme Φ est uniformément continue sur $[0,1]^2$,

$$\exists \eta > 0 \quad |s' - s| < \eta \text{ et } |t' - t| < \eta \Rightarrow |\Phi(s', t') - \Phi(s, t)| < \frac{\epsilon}{4}$$

Considérons les subdivisions :

$$s_0 = 0 < s_1 < \dots < s_m = 1 \quad \text{avec } |s_{j+1} - s_j| < \eta$$

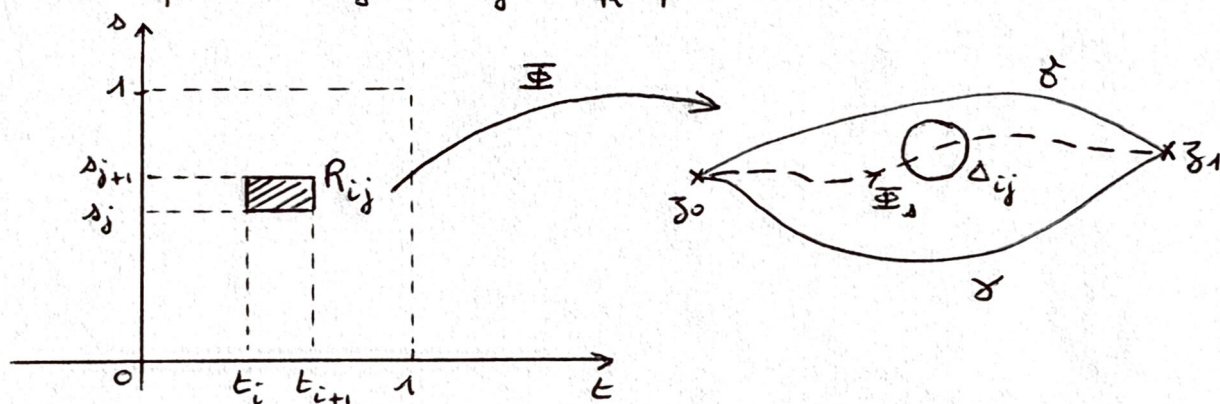
$$t_0 = 0 < t_1 < \dots < t_n = 1 \quad \text{avec } |t_{i+1} - t_i| < \eta$$

et notons :

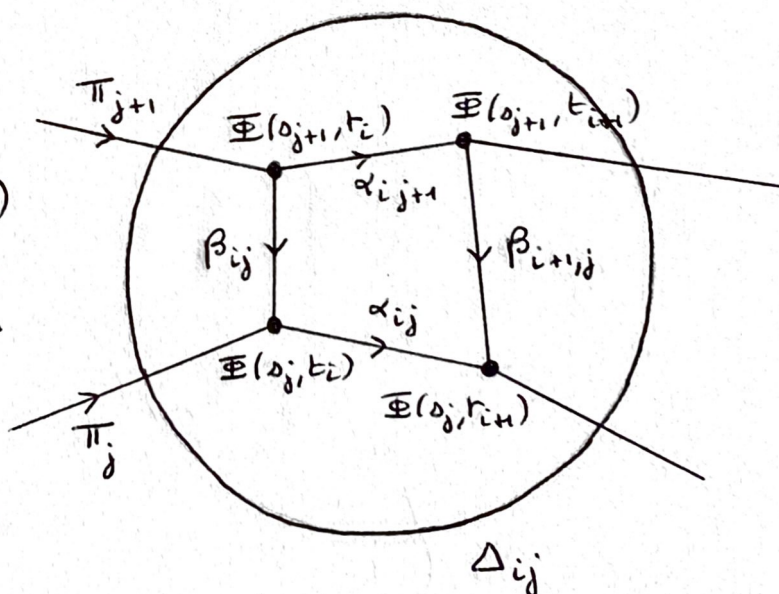
R_{ij} le rectangle $\{(s, t) \mid t_i \leq t \leq t_{i+1} \text{ et } s_j \leq s \leq s_{j+1}\}$

Δ_{ij} le disque ouvert de centre $\Phi(s_j, t_i)$ et de rayon ϵ .

Il est clair que $\Phi(R_{ij}) \subset \Delta_{ij} \subset D_k$ pour un certain indice k .



Chacun des chemins polygonaux $\pi_j : (z_0, \Phi(s_j, t_1), \dots, \Phi(s_j, t_{n-1}), z_1)$ est contenu dans la réunion des boules ouvertes $\Delta_{0j}, \Delta_{1j}, \dots, \Delta_{nj}$. Ce recouvrement ouvert permet de définir le prolongement analytique du germe f_0 le long du chemin π_j .



Si $(f_0)_{ij}$ désigne le germe obtenu au point $\Xi(s_j, t_i)$ à partir de f_0 le long du chemin $\pi_{ij} = (z_0, \Xi(s_j, t_1), \dots, \Xi(s_j, t_i))$, $(f_0)_{ij}$ définit parfaitement une fonction holomorphe $F_{ij} \in \mathcal{O}(\Delta_{ij})$ telle que $\rho_{\Xi(s_j, t_i)}(F_{ij}) = (f_0)_{ij}$.

D'après la définition de $\int_{\pi_j} f_0$ et en prenant les notations de la figure précédente, on a :

$$\int_{\pi_j} f_0 = \sum_{i=0}^{n-1} \int_{\alpha_{ij}} F_{ij}(z) dz$$

$$\int_{\pi_{j+1}} f_0 = \sum_{i=0}^{n-1} \int_{\alpha_{i,j+1}} F_{ij}(z) dz$$

Mais d'après le théorème de Cauchy :

$$\int_{\alpha_{i,j+1}} F_{ij}(z) dz + \int_{\beta_{i+1,j}} F_{ij}(z) dz = \int_{\beta_{ij}} F_{ij}(z) dz + \int_{\alpha_{ij}} F_{ij}(z) dz$$

En additionnant ces égalités pour $0 \leq i \leq n-1$, on obtient :

$$\int_{\pi_{j+1}} f_0 + \int_{\beta_{n,j}} F_{nj}(z) dz = \int_{\beta_{0,j}} F_{0j}(z) dz + \int_{\pi_j} f_0 \quad \text{pour } 0 \leq j \leq m-1$$

Mais $\beta_{0,j}$ (resp. $\beta_{n,j}$) est réduit au point z_0 (resp. z_1), d'où :

$$\int_{\pi_{j+1}} f_0 = \int_{\pi_j} f_0 \quad \text{pour tout } 0 \leq j \leq m-1$$

Donc :

$$\int_{\pi_0} f_0 = \int_{\pi_m} f_0$$

En utilisant le recouvrement ouvert $\Delta_{0,0}, \dots, \Delta_{n,0}$ de π_0 et de γ , le même raisonnement montre que : $\int_{\pi_0} f_0 = \int_{\gamma} f_0$. De même $\int_{\pi_m} f_0 = \int_{\delta} f_0$, et finalement $\int_{\gamma} f_0 = \int_{\delta} f_0$.

preuve :

Choix du polynôme q

Le polynôme $p(z, y)$ s'écrit sous la forme $p = \lambda p_1 \dots p_R$ où chaque p_i est un polynôme irréductible de l'anneau factoriel $\mathbb{C}[z_1, \dots, z_n, y]$ et où $\lambda \in \mathbb{C}^*$. On peut supprimer ces polynômes distincts deux à deux.

Notons $p(z, y) = q_m(z) y^m + \dots + q_0(z)$

Si $m=0$, on prend $q(z) = q_0(z)$. Par hypothèse $q_0(z_0) \neq 0$, et le théorème se montre facilement. Si γ est un chemin de $\mathbb{C}^n \setminus q^{-1}(0)$ d'origine z_0 et d'extrémité z_1 , posons $\tilde{\gamma}(t) = (\gamma(t), 0)$.

$\tilde{\gamma}$ est un chemin de $(\mathbb{C}^n \setminus q^{-1}(0)) \times \{0\}$, et il existe un voisinage Ω_ϵ de $\tilde{\gamma}(t)$ dans $\mathbb{C}^n$ tel que les segments $\{(z, y) \mid y \in \mathbb{R} \text{ et } 0 \leq y \leq 1\}_{z \in \Omega_\epsilon}$ soient inclus dans $\mathbb{C}^n \setminus p^{-1}(0)$.

L'intégrale $J(z) = \int_0^1 f_t(z, y) dy \in \mathcal{O}(\Omega_\epsilon)$ a un sens pour tout $z \in \Omega_\epsilon$, f_t désignant la fonction holomorphe sur Ω_ϵ qui induit le germe en $\tilde{\gamma}(t)$ obtenu en prolongeant f_0 le long du chemin $\tilde{\gamma}$.

La définition 1.2 est alors satisfaite.

Si F est à détermination finie faible, il est clair que la fonction analytique multiforme G dans $\mathbb{C}^n \setminus q^{-1}(0)$ engendrée par le germe induit par J est aussi à détermination finie faible. Enfin si F est à croissance tempérée, le théorème de la moyenne montre que G l'est aussi.

Le cas le plus intéressant est celui où $m \neq 0$:

Si $m \neq 0$, notons $\alpha_1(z), \dots, \alpha_m(z)$ les m racines de $p(z, y)$ lorsque z est fixé dans $\mathbb{C}^n \setminus q_m^{-1}(0)$, on a :

$$p(z, y) = q_m(z) \prod_{i=1}^m (y - \alpha_i(z))$$

et le discriminant $\Delta(z) = \prod_{1 \leq i < j \leq m} (\alpha_i(z) - \alpha_j(z))^2$ n'est pas identiquement nul grâce aux hypothèses faites sur p . On sait que Δ est une fonction rationnelle de la forme $\Delta(z) = \frac{B(z)}{q_m^w(z)}$ où B est un polynôme et $w \in \mathbb{N}$.

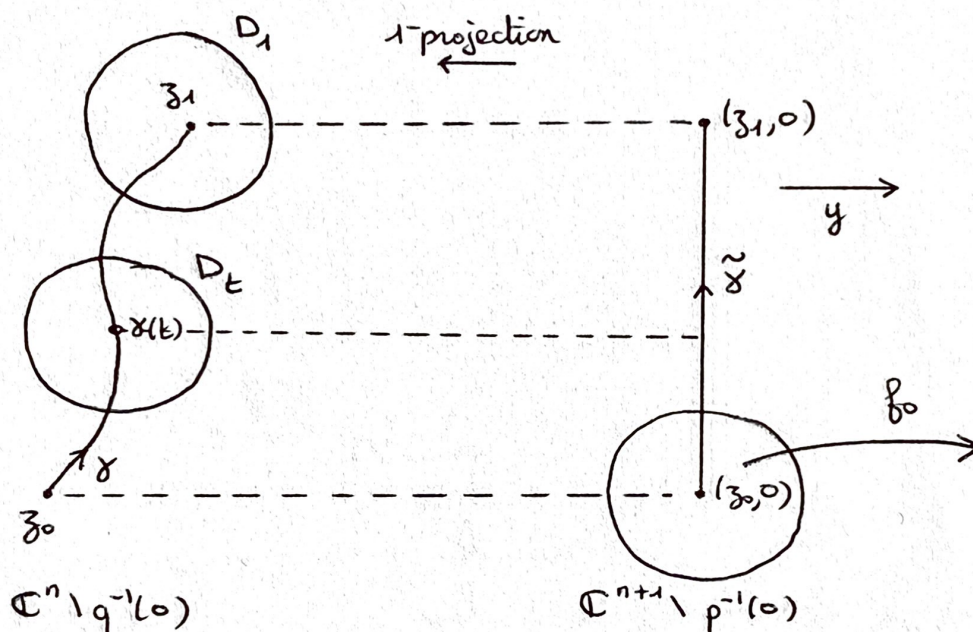
Les polynômes $p(z, 1)$ et $q_0(z) = p(z, 0)$ ne sont pas identiquement nuls

puisque $p(z_0, 0) \neq 0$ et $p(z_0, 1) \neq 0$.

On pose alors : $q(z) = B(z) q_m(z) q_0(z) p(z, 1)$

Le choix de q montre que si $z \in \mathbb{C}^n \setminus q^{-1}(0)$, toutes les racines $\alpha_1(z), \dots, \alpha_m(z)$ sont distinctes deux à deux et ne sont jamais égales à 0 ou à 1.

(1) Prolongement analytique du germe q



$$p(z, y) = q_m(z) y^m + \dots + q_0(z) \quad \text{et } m \geq 1.$$

Considérons les m branches continues des racines $\alpha_1(z), \dots, \alpha_m(z)$ de $p(z, y) = 0$ le long du chemin $\gamma \in \mathcal{C}(z_0, z_1)$ inclus dans $\mathbb{C}^n \setminus q^{-1}(0)$, et posons :

$$a_i(t) = \alpha_i(\gamma(t)) \quad 1 \leq i \leq m \quad 0 \leq t \leq 1$$

Le choix de q montre que le m -uplet $a_1(t), \dots, a_m(t)$ vérifie les hypothèses du lemme d'évitement. Il existe donc une famille de chemins $\{\gamma_t\}_{0 \leq t \leq 1}$ telle que pour tout $t \in [0, 1]$, $s \mapsto \gamma_t(s)$ soit un chemin de $\mathbb{C} \setminus \{a_1(t), \dots, a_m(t)\}$ et γ_0 soit le segment $[0, 1]$.

$\tilde{\gamma}(t) \doteq (\gamma(t), 0)$ est un chemin de $\mathbb{C}^{n+1} \setminus p^{-1}(0)$ et nous pouvons prolonger analytiquement le germe f_0 induit par F au point $\tilde{\gamma}(0)$ le long de $\tilde{\gamma}$, et obtenir le germe $(f_0)_{\tilde{\gamma}}$ en $\tilde{\gamma}(1) = (z_1, 0)$, où $z_1 \doteq \gamma(1)$.

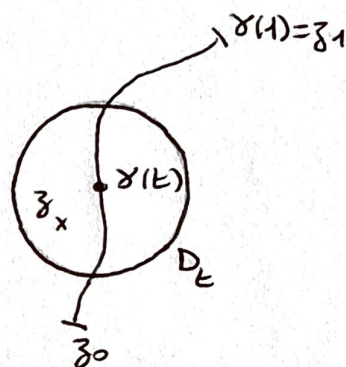
Si $t \in [0, 1]$ est fixé, notons $(f_0)_{\tilde{\gamma}_t}$ le germe au point $(\gamma(t), 0)$ obtenu par prolongement analytique de f_0 le long du morceau $\tilde{\gamma}_t$ de $\tilde{\gamma}$ obtenu pour $0 \leq s \leq t$.

Par continuité des racines $\alpha_1, \dots, \alpha_m$, il existe un polydisque D_t de $\mathbb{C}^n$ de centre $\gamma(t)$, un voisinage ouvert Ω_t de $D_t \times \{0\}$ et une fonction F_t holomorphe sur Ω_t tels que $\rho_{\tilde{\gamma}(t)}(F_t) = (f_0)_{\tilde{\gamma}_t}$ et :

$$\forall z \in D_t \quad \gamma_t \text{ est un chemin de } \mathbb{C}^n \setminus \{\alpha_1(z), \dots, \alpha_m(z)\}$$

Prenons alors, pour tout $z \in D_t$:

$$J_t(z) = \int_{\gamma_t} \rho_{(z,0)}(F_t)(z, y) dy$$



L'intégrale $J_t(z)$ du germe $\rho_{(z,0)}(F_t)(z, \cdot)$ induit par $F_t(z, \cdot)$ en $y=0$ prise le long du chemin γ_t a un sens puisque le chemin $s \mapsto (z, \gamma_t(s))$ est inclus dans $\mathbb{C}^{n+1} \setminus p^{-1}(0)$. Or, une fonction analytique sur un ouvert de $\mathbb{C}^{n+1} \setminus p^{-1}(0)$ est holomorphe par rapport à chacune de ses variables, donc par rapport à z , de sorte que $J_t \in \mathcal{O}(D_t)$.

Finalement, les fonctions $J_t \in \mathcal{O}(D_t)$ définissent le prolongement analytique du germe g_0 puisque :

$$* \rho_{z_0}(J_0) = g_0.$$

En effet, si $z \in D_0$ $J_0(z) = \int_0^1 f_0(z, y) dy$

* Vérifions la définition 1.2 avec la famille de germes $(\rho_{\gamma(t)}(J_t))_{0 \leq t \leq 1}$.

A montrer :

$\forall \tau \in [0, 1] \quad \exists V_\tau \subset D_\tau$ voisinage de $\gamma(\tau) \quad \exists T$ intervalle ouvert inclus dans $[0, 1]$ de centre τ , tel que $\gamma(T) \subset V_\tau$, $\exists h \in \mathcal{O}(V_\tau)$ tel que pour tout $t \in T$ $\rho_{\gamma(t)}(h) = \rho_{\gamma(t)}(J_t)$

L'uniforme continuité de φ donne :

$$\exists \eta_2 > 0 \quad |t - t'| < \eta_2 \Rightarrow \forall s \in [0, 1] \quad |\varphi(s, t) - \varphi(s, t')| < \frac{\varepsilon}{2}$$

où $\varepsilon = d(\varphi_2([0, 1]), \{\alpha_1(\gamma(\tau)), \dots, \alpha_m(\gamma(\tau))\})$

Ainsi $\varphi_t \sim \varphi_\tau$ dans $\mathbb{C} \setminus \{\alpha_1(\gamma(\tau)), \dots, \alpha_m(\gamma(\tau))\}$ et l'homotopie est donnée par $\varphi(s, t) = \Xi$.

Prendons donc $T =]\tau - \eta_2, \tau + \eta_2[\cdot \Xi([0, 1]^2)$ est un compact inclus dans $\mathbb{C} \setminus \{\alpha_1(\gamma(\tau)), \dots, \alpha_m(\gamma(\tau))\}$ et nous pouvons trouver un voisinage V_τ de $\gamma(\tau)$ inclus dans D_τ et tel que pour tout $z \in V_\tau$ on ait $\Xi([0, 1]^2) \subset \mathbb{C} \setminus \{\alpha_1(z), \dots, \alpha_m(z)\}$.
 Ξ définit encore l'homotopie de φ_t à φ_τ dans $\mathbb{C} \setminus \{\alpha_1(z), \dots, \alpha_m(z)\}$.

Prendons enfin $h = J_\tau|_{V_\tau}$ et montrons que si $t \in T$:

$$\rho_{\gamma(t)}(J_\tau) = \rho_{\gamma(t)}(J_t)$$

$$\forall t \in T \quad \forall z \in V_\tau \quad \begin{cases} J_\tau(z) = \int_{\varphi_\tau} \rho_{(z,0)}(F_\tau)(z, y) dy \\ J_t(z) = \int_{\varphi_t} \rho_{(z,0)}(F_t)(z, y) dy \end{cases}$$

On a clairement $\rho_{(z,0)}(F_\tau) = \rho_{(z,0)}(F_t)$ puisque les fonctions F_t et F_τ définissent le prolongement du germe f_0 le long de $\tilde{\gamma}$.

Comme φ_t et φ_τ sont deux chemins homotopes dans $\mathbb{C} \setminus \{\alpha_1(z), \dots, \alpha_m(z)\}$ et comme le germe $\rho_{(z,0)}(F_\tau)(z, \cdot)$ est prolongeable sur $\mathbb{C} \setminus \{\alpha_1(z), \dots, \alpha_m(z)\}$ la proposition 3.17 montre que $J_\tau(z) = J_t(z)$, ceci pour tout $z \in V_\tau$. D'où $\rho_{\gamma(t)}(J_\tau) = \rho_{\gamma(t)}(J_t)$.

Remarque importante : Par construction du prolongement de $g_0 \in \mathcal{O}_{z_0}$ nous voyons que si γ est un chemin de $\mathbb{C}^n \setminus q^{-1}(0)$ d'origine z_0 et d'extrémité z_1 , on a :

$$(g_0)_\gamma = \int_{\varphi_1(\gamma)} (f_0)_\gamma dy \quad (1)$$

où $\varphi_1(\gamma)$ est le chemin d'origine 0 et d'extrémité 1 de $\mathbb{C} \setminus \{\alpha_1(z_1), \dots, \alpha_m(z_1)\}$ obtenu à partir du segment $[0, 1]$ grâce au lemme d'évitement, et où $\tilde{\gamma}(t) \doteq (\gamma(t), 0)$.

(1) est une écriture commode qui signifie que le germe $(g_0)_\gamma$ induit par g_0 en z_1 est égal au germe induit par la fonction analytique J_1 définie au voisinage de z_1 par : $J_1(z) = \int_{\varphi_1(\gamma)} \rho_{(z_1, 0)}(F_1)(z, y) dy$

dont la valeur en z_1 est : $J_1(z_1) = (g_0)_\gamma(z_1) = \int_{\varphi_1(\gamma)} (f_0)_\gamma(z, y) dy$.

Remarque : Le germe $(g_0)_\gamma$ ne dépend que de f_0 et du chemin γ puisque la classe d'homotopie du chemin $\varphi_1(\gamma)$ dans $\mathbb{C} \setminus \{\alpha_1(z_1), \dots, \alpha_m(z_1)\}$ est parfaitement déterminée d'après le lemme d'évitement.

(2) Si F est à détermination finie faible, G l'est aussi.

$H_G(z_0)$ désigne le $\mathbb{C}$ -espace vectoriel engendré par la famille $S_G(z_0)$ des branches locales de G en z_0 . Chaque élément de $S_G(z_0)$ est de la forme :

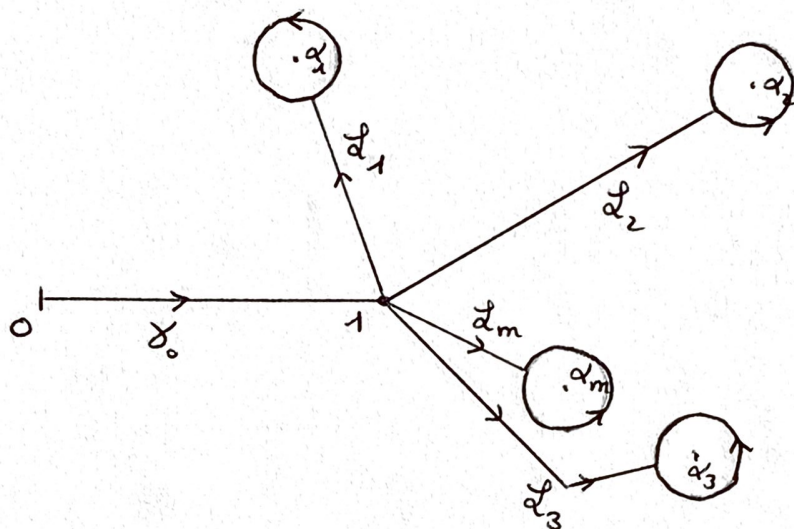
$$(g_0)_\gamma = \int_{\varphi_1(\gamma)} (f_0)_\gamma dy$$

où γ est un lacet d'origine z_0 de $\mathbb{C}^n \setminus q^{-1}(0)$, où $\tilde{\gamma}(t) \doteq (\gamma(t), 0)$ et où $\varphi_1(\gamma)$ est le chemin d'origine 0 et d'extrémité 1 du plan épointé $\mathbb{C} \setminus \{\alpha_1(z_0), \dots, \alpha_m(z_0)\}$ obtenu grâce au lemme d'évitement.

Nous allons exprimer cette intégrale comme une somme finie d'intégrales particulières. Le groupe fondamental de $\mathbb{C} \setminus \{\alpha_1(z_0), \dots, \alpha_m(z_0)\}$ est engendré par les m chemins fermés $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ où α_i est d'indice 1

par rapport à $\alpha_i(z_0)$, et d'indice nul relativement aux α -points restant.

Nous pouvons supposer que les m lacets $\mathcal{L}_1, \dots, \mathcal{L}_m$ sont tous d'origine 1 comme sur la figure :



Soit γ_0 le segment $[0, 1]$ parcouru de 0 vers 1. Tout chemin γ du plan complexe épointé $\mathbb{C} \setminus \{\alpha_1(z_0), \dots, \alpha_m(z_0)\}$ d'origine 0 et d'extrémité 1 est homotope à un chemin composé de la forme $\mathcal{L}_{\varepsilon(i_k)} \circ \dots \circ \mathcal{L}_{\varepsilon(i_1)} \circ \gamma_0$ où $k \in \mathbb{N}$, $i_k, \dots, i_1 \in \{1, \dots, m\}$ et $\varepsilon(i_v) \in \{i_v, -i_v\}$ en posant $\mathcal{L}_{-i_v} = \mathcal{L}_{i_v}^{-1}$ (chemin inverse de $\mathcal{L}_{i_v}$).

Rappelons aussi que, d'une façon générale, si U est une fonction analytique multiforme sur $\mathbb{C} \setminus \{\alpha_1(z_0), \dots, \alpha_m(z_0)\}$, on a défini les opérateurs

$T_i = T_{\{\alpha_i\}}$ de $H_0(z_0)$ en posant $T_i(f) = (f)_{\alpha_i}$ pour tout $f \in S_0(z_0)$.

Cela étant, $\varphi_1(\gamma)$ est homotope au chemin $\mathcal{L} \doteq \mathcal{L}_{\varepsilon(i_k)} \circ \dots \circ \mathcal{L}_{\varepsilon(i_1)} \circ \gamma_0$ d'où :

$$(g_0)_\gamma = \int_{\varphi_1(\gamma)} (f_0)_\gamma dy = \int_{\mathcal{L}} (f_0)_\gamma dy$$

On a :

$$\mathcal{L}(t) = \begin{cases} \gamma_0(2^k t) & \text{si } 0 \leq t \leq \frac{1}{2^k} \\ \mathcal{L}_{\varepsilon(i_1)}(2^k t - 1) & \text{si } \frac{1}{2^k} \leq t \leq \frac{1}{2^{k-1}} \\ \dots & \dots \\ \mathcal{L}_{\varepsilon(i_k)}(2t - 1) & \text{si } \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

et, par définition de l'intégrale d'un germe $y \mapsto (f_0)_{\tilde{y}}(z_0, y)$,

$$\begin{aligned} (g_0)_x &= \int_{\tilde{\mathcal{L}}} (f_0)_{\tilde{y}} dy = \int_{t=0}^1 (f_0)_{\tilde{y}}(z_0, \tilde{\mathcal{L}}(t)) \tilde{\mathcal{L}}'(t) dt \\ &= \int_0^{\frac{1}{2^k}} (f_0)_{\tilde{y}}(z_0, x_0(2^k t)) x_0'(2^k t) 2^k dt + \sum_{v=1}^k \int_{\frac{1}{2^{k-v+1}}}^{\frac{1}{2^{k-v}}} (f_0)_{\tilde{y}}(z_0, \tilde{\mathcal{L}}_{\varepsilon(i_v)}(2^{k-v+1}t)) \\ &\quad \cdot \tilde{\mathcal{L}}'_{\varepsilon(i_v)}(2^{k-v+1}t - 1) \cdot 2^{k-v+1} dt \end{aligned}$$

Par un changement de variable :

$$(g_0)_x = \int_0^1 (f_0)_{\tilde{y}}(z_0, x_0(t)) x_0'(t) dt + \sum_{v=1}^k \int_0^1 (f_0)_{\tilde{y}}(z_0, \tilde{\mathcal{L}}_{\varepsilon(i_v)}(t)) \tilde{\mathcal{L}}'_{\varepsilon(i_v)}(t) dt$$

On a :

$$\int_0^1 (f_0)_{\tilde{y}}(z_0, x_0(t)) \cdot x_0'(t) dt = \int_{x_0} (f_0)_{\tilde{y}} dy$$

$$\int_0^1 (f_0)_{\tilde{y}}(z_0, \tilde{\mathcal{L}}_{\varepsilon(i_v)}(t)) \tilde{\mathcal{L}}'_{\varepsilon(i_v)}(t) dt = \int_{\tilde{\mathcal{L}}_{\varepsilon(i_v)}} (f_0)_{\tilde{y}_0 \circ \tilde{y}} dy \quad \text{où } \tilde{y}_0(t) \doteq (z_0, t) \quad 0 \leq t \leq 1$$

Nous continuons de la même façon :

$$\tilde{\mathcal{L}}_{\varepsilon(i_v)}(t) \doteq (z_0, \tilde{\mathcal{L}}_{\varepsilon(i_v)}(t)) \quad 0 \leq t \leq 1 \text{ définit un chemin de } \mathbb{C}^{n+1} p^{-1}(0)$$

et en posant $T_{\varepsilon(i_v)} : S_F(z_0, 1) \longrightarrow S_F(z_0, 1)$, on obtient :

$$f \longmapsto (f)_{\tilde{\mathcal{L}}_{\varepsilon(i_v)}}$$

$$(g_0)_x = \int_{x_0} (f_0)_{\tilde{y}} dy + \sum_{v=1}^k \int_{\tilde{\mathcal{L}}_{\varepsilon(i_v)}} T_{\varepsilon(i_{v-1})} \circ \dots \circ T_{\varepsilon(i_v)} ((f_0)_{\tilde{y}_0 \circ \tilde{y}}) dy \quad \parallel$$

Chaque terme $T_{\varepsilon(i_{v-1})} \circ \dots \circ T_{\varepsilon(i_v)} ((f_0)_{\tilde{y}_0 \circ \tilde{y}})$ est dans $S_F(z_0, 1)$ et s'exprime dans la base $\Psi_1, \dots, \Psi_\mu$ de $H_F(z_0, 1)$ en notant μ la dimension du $\mathbb{C}$ -espace vectoriel $H_F(z_0, 1)$. De même, le germe $(f_0)_{\tilde{y}}$ est dans $S_F(z_0, 0)$ et s'exprime dans la base $\Phi_1, \dots, \Phi_\mu$ de $H_F(z_0, 0)$.

En posant $\chi_{ij}(z) = \int_{\gamma_i} \varphi_j(z, y) dy$ et $\tau_k(z) = \int \Phi_k(z, s) ds$, on constate que $(g_0)_\gamma$ peut s'écrire comme combinaison linéaire des germes χ_{ij} ($1 \leq i \leq m$ et $1 \leq j \leq \mu$) et Φ_k ($1 \leq k \leq m$) de $\mathcal{O}_{z_0}^2$, ce qui montre bien que $H_G(z_0)$ est de dimension finie et que :

$$\dim_{\mathbb{C}}(H_G(z_0)) \leq (m+1)\mu.$$

Ceci prouve (2).

(3) Si $FE\mathcal{N}(\mathbb{C}^{n+1} \setminus p^{-1}(0))$ alors $GE\mathcal{N}(\mathbb{C}^n \setminus q^{-1}(0))$

Si $FE\mathcal{N}(\mathbb{C}^{n+1} \setminus p^{-1}(0))$, nous venons de montrer que G possède une détermination finie faible. Il ne nous reste plus qu'à montrer que G est à croissance tempérée dans $\mathbb{C}^n \setminus q^{-1}(0)$ pour pouvoir conclure que $GE\mathcal{N}(\mathbb{C}^n \setminus q^{-1}(0))$.

Si γ est un chemin de $\mathbb{C}^n \setminus q^{-1}(0)$ d'origine z_0 , on a vu que :

$$(g_0)_\gamma = \int_{\varphi_1(\gamma)} (f_0)_\gamma dy$$

Comme nous nous intéressons à la croissance de G , nous pouvons supposer que γ est un chemin polygonal. Le rang $L(\varphi_1(\gamma))$ du chemin $\varphi_1(\gamma)$ dans le plan épointé $\mathbb{C} \setminus \{\alpha_1(z_1), \dots, \alpha_m(z_1)\}$ ne dépend que du chemin γ puisque la classe d'homotopie est entièrement déterminée par γ .

Avec ces notations, nous avons la majoration 3.16. La preuve de la croissance tempérée est reportée en 3.17.

3.16 lemme :

Il existe une constante positive M telle que l'inégalité $L(\varphi_1(\gamma)) \leq M \cdot L(\gamma)$ soit vérifiée pour tous les chemins polygonaux γ de $\mathbb{C}^n \setminus q^{-1}(0)$ d'origine z_0 .

preuve :

Ce lemme est une conséquence de la proposition 2.14. Il existe une partition $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_\omega = 1$ et des points $\zeta_1, \dots, \zeta_\omega$ de $\mathbb{C}^n \setminus q^{-1}(0)$ tels que γ soit de la forme $\gamma(t) = \zeta_i + t \zeta_{i+1}$ sur chaque intervalle $[t_i, t_{i+1}]$.

Les racines $\alpha_1(\sigma), \dots, \alpha_m(\sigma)$ du polynôme $p(\sigma, Y) = q_m(\sigma)Y^m + \dots + q_0(\sigma)$ sont les m branches distinctes d'une fonction algébrique sur $\mathbb{C}^n \setminus q^{-1}(0)$ d'après la proposition 4.29.

Les fonctions $\alpha_j(t) \doteq \alpha_j(\gamma(t))$ sont donc des fonctions algébriques d'une variable complexe définies sur un voisinage du segment $[t_i, t_{i+1}]$ où $0 \leq i \leq \omega-1$, puisque vérifiant une équation du type :

$$q_m(\gamma(t)) \alpha_j(t)^m + \dots + q_0(\gamma(t)) = 0$$

où les $q_m(\gamma(t)), \dots, q_0(\gamma(t))$ sont des polynômes en t pour $t \in [t_i, t_{i+1}]$.

Pour chaque i , nous pouvons considérer la fonction polynôme en t

$$q_{v,i}(t) = q_v(\zeta_i + t\zeta_{i+1}) \text{ où } 0 \leq v \leq m.$$

Tous ces polynômes $q_{v,i}$ sont de degré en t inférieur ou égal au nombre entier $K = \sup \{ \deg q_v / 0 \leq v \leq m \}$.

La proposition 4.28 montre que seulement 2 cas sont possibles : pour un indice j fixé,

$$1^\circ \Delta_m \alpha_j(t) \not\equiv 0 \text{ sur } [t_i, t_{i+1}]$$

Alors $\Delta_m \alpha_j(t)$ possède au plus $2mK$ zéros dans $[t_i, t_{i+1}]$.

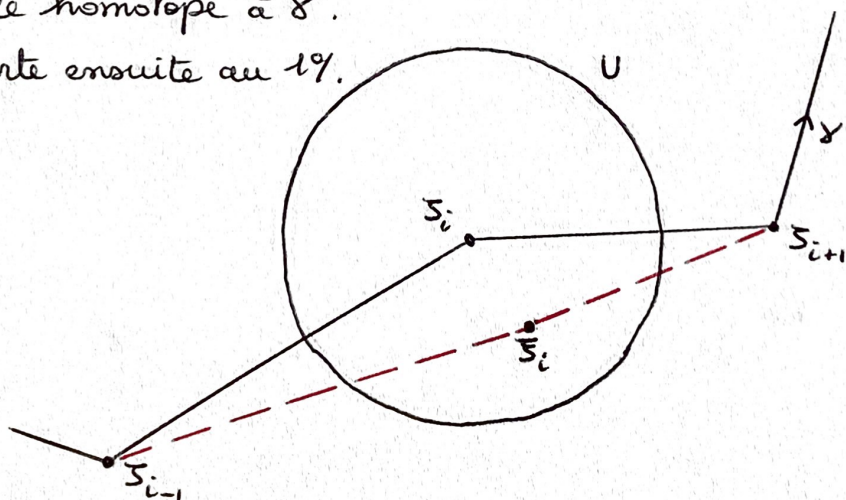
$$2^\circ \Delta_m \alpha_j(t) \equiv 0 \text{ sur } [t_i, t_{i+1}]$$

α_j est une fonction holomorphe définie sur un voisinage de ζ_i . Deux cas sont alors possibles :

$$a) \forall U \text{ voisinage de } \zeta_i \text{ inclus dans } \mathbb{C}^n \setminus q^{-1}(0) \exists \xi_i \in U \alpha_j(\xi_i) \notin \mathbb{R}$$

On considère alors un voisinage U assez petit pour que l'on puisse remplacer le sommet ζ_i par le point ξ_i tout en conservant une ligne polygonale homotope à γ .

On se reporte ensuite au 1°.



b) $\exists$ un voisinage de ζ_i tel que : $\forall \zeta \in U \quad \alpha_j(\zeta) \in \mathbb{R}$

La fonction holomorphe α_j de l'ouvert U de $\mathbb{C}^n$ dans $\mathbb{R}$ est nécessairement une constante réelle k . Le polynôme $p(\sigma, Y) = q_m(\sigma)Y^m + \dots + q_0(\sigma)$ admet alors la racine réelle $\alpha_j = k$ pour tout $\sigma \in U$, donc il existe un polynôme $q(\sigma, Y)$ tel que $P(\sigma, Y) = q(\sigma, Y)(Y - k)$ et l'hypothèse du § 6.1 montre que $k \notin [0, 1]$.

Si $t_i \leq t \leq t_{i+1}$, $\alpha_j(t) = k \in \mathbb{R} \setminus [0, 1]$ n'interceptera jamais l'intervalle $[t_i, t_{i+1}]$, et n'interviendra pas dans les hypothèses de la proposition 5.7.

La proposition 5.7 et la remarque 5.16 montrent que, en notant $\varphi^1, \dots, \varphi^{\omega-1}$, $\varphi^\omega = \varphi_1$ les transformations successives du segment $\varphi_0 = [0, 1]$ par le lifting lemma, et en posant $k = m \times (2mK)$, on aura :

$$\begin{array}{ccccccc} \varphi_0 & \rightarrow & \varphi^1 & \rightarrow & \dots & \rightarrow & \varphi^{\omega-1} \rightarrow \varphi_1 = \varphi_1(x) \\ t \text{ varie de: } & & t_0 & \text{ à } & t_1 & \dots & t_{\omega-1} \text{ à } t_\omega \quad (\omega \text{ intervalles}) \end{array}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} L(\varphi^1) \leq 4km + 1 \\ L(\varphi^2) \leq 4km + 1 + 4e(\varphi^1) \quad , \text{ et } e(\varphi^1) \leq km \\ L(\varphi^3) \leq 4km + 1 + 4e(\varphi^2) \quad , \text{ et } e(\varphi^2) \leq e(\varphi_1) + km \leq 2km \\ \dots \\ L(\varphi^\omega) = L(\varphi_1) \leq 4km + 1 + 4e(\varphi^{\omega-1}) \quad \text{ et } e(\varphi^{\omega-1}) \leq (\omega-1)km \end{array} \right.$$

Ainsi : $L(\varphi_1) \leq 4km\omega + 1$

En se rappelant que $\omega = L(x)$ et que $k = 2m^2K$ ne dépend que du polynôme q , nous pouvons trouver une constante $M > 0$ ne dépendant que du polynôme q , et telle que $L(\varphi_1(x)) \leq M \cdot L(x)$.

Ce qui prouve le lemme 3.16.

3.17 Preuve de la croissance tempérée de G

Pour $z \in \mathbb{C}^n \setminus q^{-1}(0)$, définissons :

$$\delta(z) = \inf \{ |\alpha_i(z) - \alpha_j(z)|, |\alpha_i(z)|, |1 - \alpha_i(z)| \mid 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq m \text{ et } i \neq j \}$$

$$A(z) = \sup \{ |\alpha_i(z)| \mid 1 \leq i \leq m \}$$

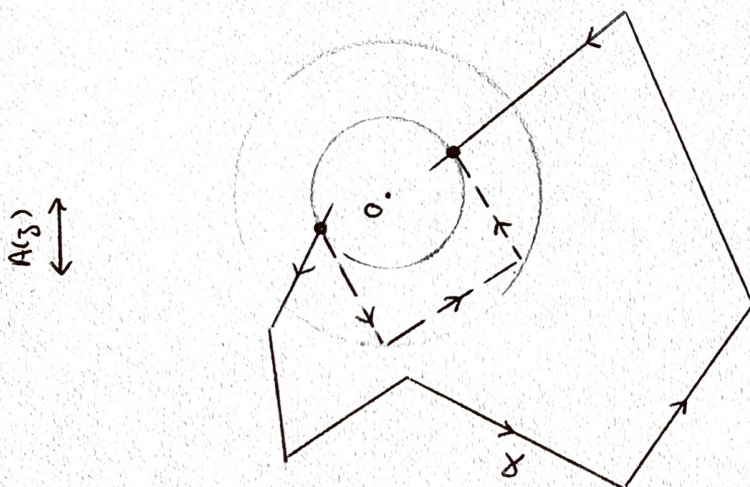
Le choix de q montre que ces deux fonctions sont à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$. Si $\omega \in \mathbb{N}$ est fixé et si γ est un chemin d'origine z_0 et de rang $L(\gamma) \leq \omega$, on a :

$$(g_0)_\gamma = \int_{\varphi_1(\gamma)} (f_0)_\gamma dy, \text{ et le lemme 6.8 montre que } L(\varphi_1(\gamma)) \leq M\omega.$$

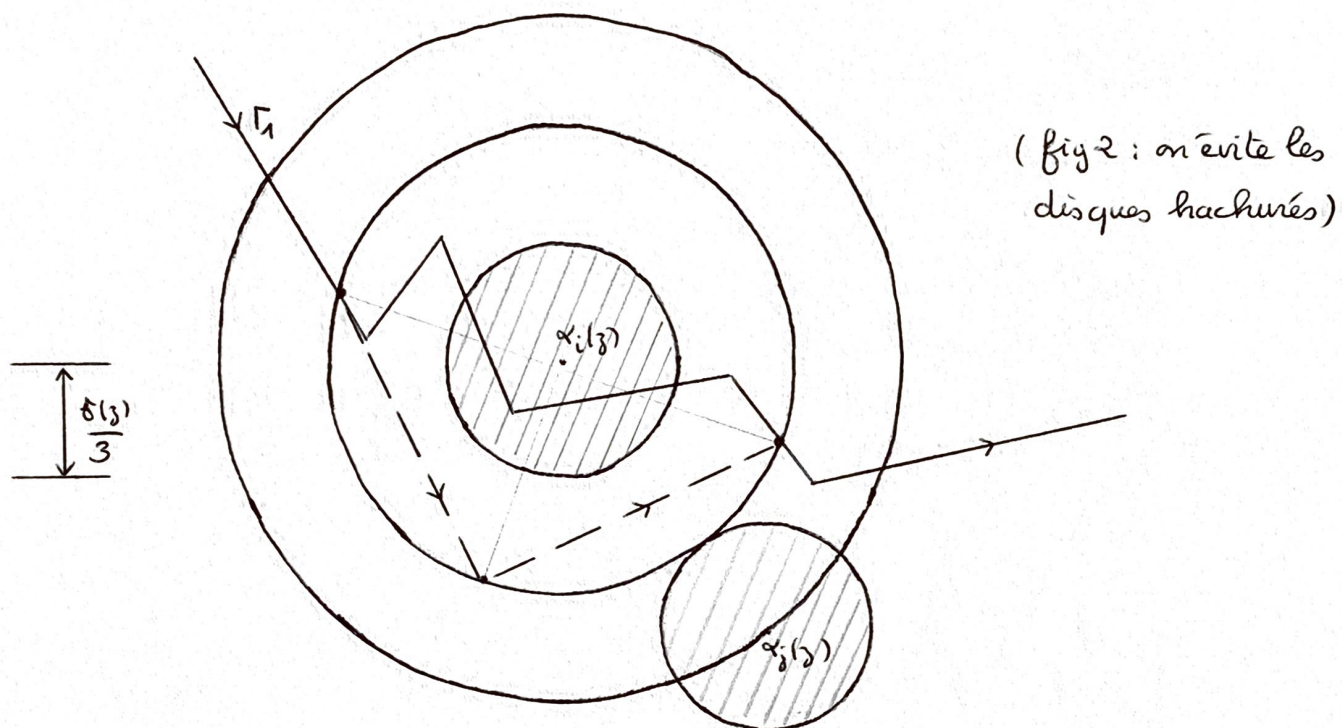
Montrons le résultat suivant :

- (1) Le chemin $\varphi_1(\gamma) \in \mathcal{C}(0,1)$ est homotope dans $\mathbb{C} \setminus \{\alpha_1(z), \dots, \alpha_m(z)\}$ à un chemin polygonal qui vérifie les 3 conditions :
- (a) Γ possède au plus $4M\omega$ segments
 - (b) La longueur de Γ est $\leq 16M\omega A(z)$
 - (c) $d(\Gamma, \{\alpha_1(z), \dots, \alpha_m(z)\}) \geq \frac{\delta(z)}{3}$

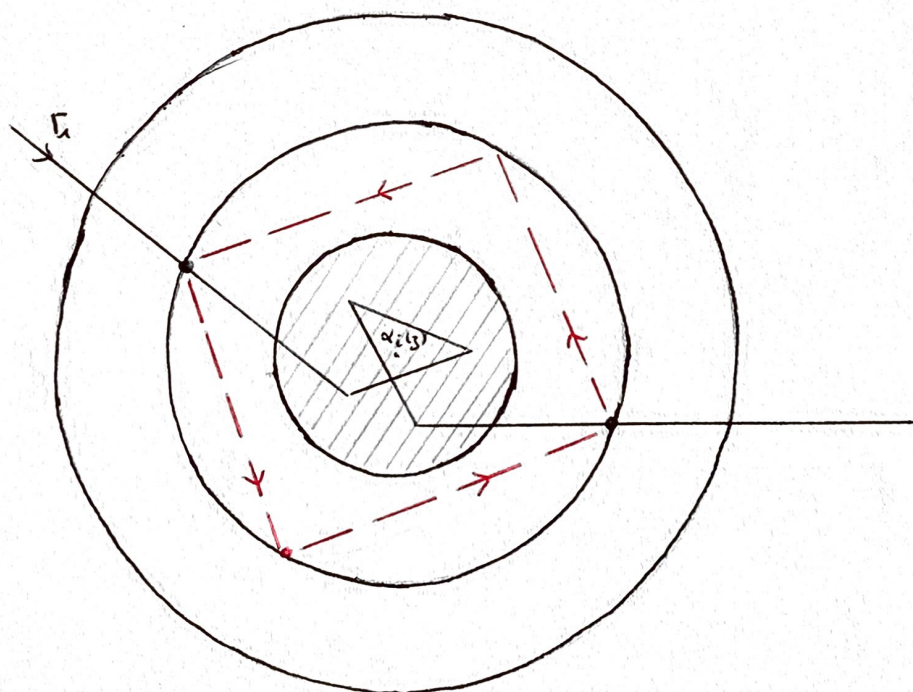
γ est homotope dans $\mathbb{C} \setminus \{\alpha_1(z), \dots, \alpha_m(z)\}$ à un chemin polygonal de même rang, de sorte que nous puissions supposer γ polygonal, et $L(\gamma) \leq M\omega$. Si γ sort du disque $D(0, 2A(z))$, nous le simplifions en supprimant tous les morceaux de γ situés à l'extérieur du disque $D(0, A(z))$ et en les remplaçant par (chaque fois) au plus 3 segments situés dans la couronne $A(z) \leq |z| \leq 2A(z)$. Le chemin polygonal Γ_1 obtenu après cette opération (voir figure 1) possède au plus $M\omega$ segments, et se trouve entièrement contenu dans le disque $D(0, 2A(z))$.



Si $d(\Gamma_1, \{\alpha_1(z), \dots, \alpha_m(z)\}) < \frac{\delta(z)}{3}$, il existe un indice $1 \leq i \leq m$ tel que le chemin polygonal Γ_1 traverse l'intérieur du disque $D(\alpha_i(z), \frac{\delta(z)}{3})$. Dans ce cas, nous remplaçons les segments $\{S_i\}$ de Γ_1 contenus dans le disque $D(\alpha_i(z), \frac{\delta(z)}{3})$ par au plus 2 segments situés dans la couronne $\frac{\delta}{3} \leq |z - \alpha_i(z)| \leq 2\frac{\delta}{3}$, en conservant la classe d'homotopie. Cela est fait à la figure 2 :



Autre cas de figure :



($\curvearrowright$ on parcourt 2 fois le chemin en pointillé)

Chaque opération de ce type ajoute au plus 3 segments à chacun des segments du chemin Γ_1 . Comme Γ_1 possède au plus $M\omega$ segments, le nouveau chemin polygonal Γ vérifie : $L(\Gamma) \leq 4M\omega$. De plus, Γ sera inclus dans le disque $D(0, 2A(z))$ puisque Γ_1 y était et puisque chacune des transformations précédentes transformait des segments de Γ_1 en segments situés dans les disques $D(\alpha_i(z), \delta(z))$. Donc :

$$\Gamma \subset D(0, \sup(2A(z), A(z) + \delta(z))) \subset D(0, 2A(z)) \text{ car } \delta(z) \leq A(z)$$

Γ vérifie bien les propriétés (a) et (c). (b) est vrai, puisque, chaque segment de Γ étant de longueur $\leq 4A(z)$, on aura une longueur totale du chemin Γ majorée par $4A(z) \times 4M\omega$.

Comme $F \in \mathcal{N}(\mathbb{C}^{n+1} \setminus p^{-1}(0))$, il existe des entiers p et w et une suite croissante de constantes $C_1, C_2, \dots$ tels que, pour tout chemin μ de $\mathbb{C}^n \setminus p^{-1}(0)$ d'extrémité (z, y) on ait :

$$|(\beta_0)_\mu(z, y)| \leq C_{L(\mu)} \frac{(1+|z|+|y|)^p}{|p(z, y)|^w}$$

Le chemin $\tilde{\gamma}$ défini par $\tilde{\gamma}(t) = (\gamma(t), 0)$ possède un rang inférieur à $L(\gamma)$, donc $L(\tilde{\gamma}) \leq L(\gamma) \leq \omega$. De même, si $\tilde{\Gamma}$ désigne le chemin $\tilde{\Gamma}(t) = (z, \Gamma(t))$, où Γ est le chemin polygonal obtenu dans le résultat (1) ci-dessus, on aura $L(\tilde{\Gamma}) \leq L(\Gamma) \leq 4M\omega$.

Observons $(\gamma_0)_\gamma(z) = \int_\Gamma (\beta_0)_{\tilde{\gamma}}(z, y) dy$. Durant l'intégration le long de Γ , nous utilisons les branches de F obtenues par prolongement analytique du germe β_0 au point $(z_0, 0)$ aux points (z, y) le long de chemins dont le rang est $\leq 4M\omega + \omega$, de sorte que :

$$|(\gamma_0)_\gamma(z)| \leq (\text{long } \Gamma) \sup_{y \in \Gamma} |(\beta_0)_{\tilde{\gamma}}(z, y)| \leq 46M\omega A(z) C_{3M\omega + \omega} R(z) \quad (2)$$

où l'on a posé :

$$R(z) = \sup_{y \in \Gamma} \left\{ \frac{(1+|z|+|y|)^p}{|p(z, y)|^w} \right\}$$

$$\forall y \in \Gamma \quad |y| \leq 2A(z)$$

D'autre part, si $y \in \Gamma$ $p(z, y) = q_m(z) \prod_{i=1}^m (y - \alpha_i(z))$ et le (c) du (1) donnent,

$$|p(z, y)| \geq |q_m(z)| \frac{\delta(z)^m}{3^m}$$

En reportant dans (2) :

$$|(g_0)_\gamma(z)| \leq 16M\omega A(z) C_{4M\omega+\omega} \frac{(1+|z|+2A(z))^e}{|q_m(z)|^w |\delta(z)|^{mw}} \cdot 3^{mw} \quad (3)$$

Il reste à estimer $|q_m(z)|$, $A(z)$ et $\delta(z)$ de façon à faire apparaître $q(z)$.

* Majoration de $A(z)$

Si $z \notin q_m^{-1}(0)$, $q_m(z) \alpha_i(z)^m + \dots + q_0(z) = 0$ montre que :

$$|\alpha_i(z)| \leq \sup_{0 \leq i \leq m-1} \left(1 + \frac{|q_i(z)|}{|q_m(z)|} \right)$$

En posant $K = \sup_{0 \leq i \leq m} \deg q_i$, on constate l'existence d'une constante C_0 telle que :

$$A(z) \leq C_0 \frac{(1+|z|)^K}{|q_m(z)|}$$

* Minoration de $\delta(z)$

On utilise le discriminant $\Delta(z) = \prod_{1 \leq i < j \leq m} (\alpha_i(z) - \alpha_j(z))^2$ qui contient $\frac{m(m-1)}{2}$ facteurs.

On a : $|\alpha_i(z) - \alpha_j(z)|^2 \leq 4 A(z)^2$ pour $i \neq j$ fixés, donc :

$$|\Delta(z)| \leq |\alpha_i(z) - \alpha_j(z)|^2 \cdot 4^{\frac{m(m-1)}{2}-1} \cdot A(z)^{m(m-1)-2}$$

En posant $r = m(m-1)-2$,

$$2^{-r} |\Delta(z)|^{\frac{1}{2}} A(z)^{-r} \leq \delta(z)$$

$$2^{-r} |\Delta(z)|^{\frac{1}{2}} \cdot \frac{1}{C_0^r} \frac{(1+|z|)^{Kr}}{|q_m(z)|^r} \leq \delta(z)$$

Remplaçons dans (3) : il existe une constante C_1 telle que :

$$|(g_0)_\gamma(z)| \leq C_1 A(z) \frac{(1+|z|+2A(z))^e}{|q_m(z)|^w |\Delta(z)|^{\frac{mr}{2}} (1+|z|)^{Kr}} \cdot 3^{mw}$$

$$\begin{aligned} &\leq C_0 C_1 \frac{(1+|z|)^K}{|q_m(z)|^{w+1}} \frac{|q_m(z)|^{r mw}}{|\Delta(z)|^{\frac{mr}{2}} (1+|z|)^{Kr}} \left(1+|z|+2C_0 \frac{(1+|z|)^K}{|q_m(z)|} \right)^e \\ &\leq C_0 C_1 C_2 \frac{(1+|z|)^{K+Kr-Kr mw}}{|q_m(z)|^{w+e+1-2mr}} \frac{|\Delta(z)|^{\frac{mr}{2}}}{|\Delta(z)|^{\frac{mr}{2}}} \end{aligned}$$

(où C_2 est une constante)

Il suffit maintenant de se rappeler que $q(z) = q_m(z) B(z) q_0(z) p_0(z)$ où $\Delta(z) = \frac{B(z)}{(q_m(z))^\Delta}$, $\Delta \in \mathbb{N}$ et B étant un polynôme en z , pour obtenir une nouvelle constante C'_ω et des entiers m' et w' tels que $| (q_0)_\Delta(z) | \leq C'_\omega \frac{(1+|z|)^{m'}}{|q(z)|^{w'}}$.

Cela achève la démonstration du théorème ^{3.15} 3.18. Voyons maintenant deux corollaires immédiats du théorème d'intégration :

3.18

3.21 Corollaire

Soient $F \in \mathcal{H}(\mathbb{C}^{n+1} \setminus p^{-1}(0))$ et $A \in \mathcal{A}(\mathbb{C}^n \setminus q^{-1}(0))$ une fonction algébrique dont toutes les branches sont distinctes des fonctions racines du polynôme $y \mapsto p(z, y)$. à supprimer

Soient $z_0 \in \mathbb{C}^n$ et α une branche locale de A en z_0 telle que :

$$\{z_0\} \times [0, \alpha(z_0)] = \{(z_0, y) / \exists s \in [0, 1] \quad y = s \alpha(z_0)\} \subset \mathbb{C}^{n+1} \setminus p^{-1}(0)$$

Si f désigne une détermination holomorphe de F sur un voisinage simplement connexe de $\{z_0\} \times [0, \alpha(z_0)]$, la fonction $g(z) = \int_0^{\alpha(z)} f(z, y) dy$ est holomorphe sur un voisinage de z_0 et induit un germe g en z_0 .

Alors le germe $g \in \mathcal{O}_{z_0}$ engendre une fonction G de la classe de Nilsson dans $\mathbb{C}^n \setminus q^{-1}(0)$ où $q(z) \in \mathbb{C}[z_1, \dots, z_n]$ est un polynôme convenable.

preuve :

Par changement de variable :

$$g(z) = \int_0^{\alpha(z)} f(z, y) dy = \int_0^1 f(z, \alpha(z)y) \alpha(z) dy = \int_0^1 h(z, y) dy$$

où $h(z, y) \doteq \alpha(z) \cdot f(z, \alpha(z)y)$.

La proposition 2.21 indique que la fonction $h(z, y)$ définie sur un voisinage de $\{z_0\} \times [0, 1]$ représente la branche d'une fonction de la classe de Nilsson $H(z, y)$ de $\mathbb{C}^{n+1}$.

Le théorème d'intégration permet de conclure.

3.19

3.22 Corollaire (Intégrale à m variables)

Soient $F \in \mathcal{U}(\mathbb{C}^{n+m} \setminus p^{-1}(0))$ où $z = (z_1, \dots, z_n)$ et $y = (y_1, \dots, y_m)$ et $z_0 \in \mathbb{C}^n$ choisi tel que le m -simplexe géométrique

$\{z_0\} \times \Delta_m = \{(z_0, y) / \forall i \in [1, m] \ y_i \geq 0 \text{ et } y_1 + \dots + y_m \leq 1\}$
n'intercepte pas $p^{-1}(0)$.

Choisissons une branche uniforme $f(z, y)$ de F définie au voisinage de $\{z_0\} \times \Delta_m$.

Alors $g(z) = \int_{\Delta_m} f(z, y) dy$ définit un germe de fonction holomorphe en z_0 qui se prolonge Δ_m^m et donne naissance à une fonction G de la classe de Wilson dans $\mathbb{C}^n$.

preuve:

On procède par récurrence finie descendante sur le nombre de variables y_i .

Considérons la fonction analytique sur un voisinage de z :

$$g_{m-1}(z, y_1, \dots, y_{m-1}) = \int_0^{\alpha(y')} f(z, y', y_m) dy_m$$

où $\alpha(y') = 1 - y_1 - \dots - y_{m-1}$ et $y' = (y_1, \dots, y_{m-1})$. Le corollaire 3.21 montre que g_{m-1} définit une fonction de la classe de Wilson dans $\mathbb{C}^{n+m-1}$.

Prenons ensuite :

$$g_{m-2}(z, y_1, \dots, y_{m-2}) = \int_0^{\alpha(y'')} g_{m-1}(z, y'', y_{m-1}) dy_{m-1}$$

où $\alpha(y'') = 1 - y_1 - \dots - y_{m-2}$ et $y'' = (y_1, \dots, y_{m-2})$. De la même manière g_{m-2} définit une fonction de la classe de Wilson dans $\mathbb{C}^{n+m-1}$, et ainsi de suite jusqu'à $g(z)$, puisque :

$$g(z) = \int_{y_1=0}^1 \int_{y_2=0}^{1-y_1} \dots \int_{y_{m-1}=0}^{1-y_1-\dots-y_{m-2}} \left(\int_{y_m=0}^{1-y_1-\dots-y_{m-1}} f(z, y) dy_m \right) dy_{m-1} \dots dy_1$$

C.F.D

4.

INTEGRATION DES FORMES RATIONELLES SUR DES CYCLES VARIABLES

Soit $P(z) \in \mathbb{C}[z_1, \dots, z_n]$ un polynôme non constant où $z = (z_1, \dots, z_n)$.
Pour chaque $\sigma \in \mathbb{C}$, $S(\sigma) = \{z \in \mathbb{C}^n / P(z) = \sigma\}$ est une hypersurface
algébrique de $\mathbb{C}^n$. Si un point z de $\mathbb{C}^n$ vérifie $\text{grad } P(z) = 0$, alors
 z s'appelle un point critique de P et le complexe $\sigma = P(z)$ s'appelle une
valeur critique de P . Le résultat fondamental est :

4.1 Proposition :

Si $\lim_{|z| \rightarrow +\infty} |P(z)| = +\infty$, le polynôme P admet un nombre fini de valeurs
critiques.

preuve: L'ensemble des points critiques de P est un ensemble algébrique
de $\mathbb{C}^n$ puisque défini par les équations $\frac{\partial P}{\partial z_1}(z) = \dots = \frac{\partial P}{\partial z_n}(z) = 0$, et P
est une application continue sur $\mathbb{C} \cup \{+\infty\}$, donc propre.

Le théorème de Remmert montre que l'ensemble des valeurs critiques de P
est un ensemble algébrique de $\mathbb{C}$. D'autre part, le Théorème de Sard
implique que cet ensemble est de mesure nulle : c'est donc un ensemble
fini de points.

CQFD

Si $\sigma \in \mathbb{C} \setminus \Sigma$ où Σ désigne l'ensemble des valeurs critiques de P ,
 $S(\sigma)$ est une variété analytique complexe non singulière de dimension
 $n-1$. Pour $\sigma_0 \in \mathbb{C} \setminus \Sigma$ fixé, nous pouvons considérer un $(n-1)$ -cycle G_0
de la variété $S(\sigma_0)$, de classe C^1 .

Ainsi $G_0 = \Gamma_1 + \dots + \Gamma_j$ ($j \geq 1$) où chaque Γ_i est un simplexe
de $S(\sigma_0)$ obtenu grâce à une application de classe C^1 définie sur le
 $(n-1)$ -simplexe standard $\Delta = \{(t_1, \dots, t_{n-1}) / t_i \geq 0 \text{ et } \sum t_i \leq 1\}$

On notera $|G_0| = \Gamma_1 \cup \dots \cup \Gamma_j$, et on remarquera que $|G_0|$ est un compact
de $S(\sigma_0)$.

4.2 lemme

Il existe un voisinage ouvert W de $|G_0|$ dans $\mathbb{C}^n$, un disque ouvert D de $\mathbb{C}$ centré en σ_0 et une fonction C^∞ relativement aux variables $x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n, \sigma$ notée $\lambda : W \times D \longrightarrow \mathbb{C}$ où $z = (z_1, \dots, z_n)$

$$(z, \sigma) \longmapsto \lambda(z, \sigma)$$

telle que :

- (1) $\forall (z, \sigma) \in W \times D \quad P(z + \lambda(z, \sigma) \overline{\text{grad } P(z)}) = \sigma$
- (2) Pour tout $z \in W$ fixé, l'application $\sigma \mapsto \lambda(z, \sigma)$ est analytique dans D .

preuve: Posons $\Psi(z, \lambda, \sigma) = P(z + \lambda \overline{\text{grad } P(z)}) - \sigma$ et fixons $\sigma_0 \in \mathbb{C} \setminus \Sigma$.
 Pour $z \in |G_0| \subset S(\sigma_0)$ on a :

$$\frac{\partial \Psi}{\partial \lambda}(z, \lambda, \sigma_0) = \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial P}{\partial z_i}(z + \lambda \overline{\text{grad } P(z)}) \right) \cdot \overline{\frac{\partial P}{\partial z_i}(z)}$$

$$\text{d'où} \quad \frac{\partial \Psi}{\partial \lambda}(z, 0, \sigma_0) = \sum_{i=1}^n \left| \frac{\partial P}{\partial z_i}(z) \right|^2 > 0.$$

Le théorème des fonctions implicites montre l'existence d'un disque ouvert D_z centré en σ_0 , d'un voisinage W_z de z et d'une unique application C^∞ à variables réelles $x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n$ et complexe σ :

$$\begin{aligned} \lambda : W_z \times D_z &\longrightarrow \mathbb{C} \\ (z, \sigma) &\longmapsto \lambda(z, \sigma) \end{aligned}$$

telle que $P(z + \lambda(z, \sigma) \overline{\text{grad } P(z)}) = \sigma$ dans $W_z \times D_z$. Il suffit alors de recouvrir le compact $|G_0|$ par un nombre fini d'ouverts du type W_z pour obtenir (1).

L'application $\sigma \mapsto \lambda(z, \sigma)$ est C^∞ pour $z \in |G_0|$ fixé, et il faut montrer qu'elle est analytique sur D . D'après la formule de Taylor :

$$P(z + \lambda \overline{\text{grad } P(z)}) = P(z) + \lambda |\text{grad } P(z)|^2 + \lambda^2 p_2(z) + \dots + \lambda^m p_m(z)$$

Comme z est fixé, on constate que l'application $\sigma \mapsto \lambda(z, \sigma)$ vérifie une équation algébrique du type :

$$c_m \lambda^m(z, \sigma) + \dots + c_1 \lambda(z, \sigma) + c_0 = \sigma$$

ce qui prouve que $\sigma \mapsto \lambda(z, \sigma)$ est holomorphe au voisinage de tout

point σ de D . Comme λ est continue sur D , $\sigma \mapsto \lambda(z, \sigma)$ est holomorphe sur D .

CQFD

4.3 Déformation du cycle G_0

On va utiliser le lemme 4.2 pour déformer continuellement le cycle G_0 et obtenir un cycle G_σ inclus dans la variété $S(\sigma)$ lorsque σ est proche de σ_0 .

Considérons l'application C^1 : $\varphi_\sigma : W \longrightarrow S(\sigma)$

$$z \longmapsto z + \lambda(z, \sigma) \overline{\text{grad } P(z)}$$

et posons $G_\sigma = \varphi_\sigma(G_0)$.

Cela signifie que si $G_0 = \Gamma_1 + \dots + \Gamma_j$ alors $G_\sigma = \Gamma_{1,\sigma} + \dots + \Gamma_{j,\sigma}$ où chaque $\Gamma_{i,\sigma}$ ($1 \leq i \leq j$) est un $(n-1)$ -simplexe de $S(\sigma)$ obtenu par les applications $\varphi_\sigma \circ \gamma_i$ de classe C^1 .

G_σ est un $(n-1)$ -cycle de $S(\sigma)$ et la déformation $\sigma \mapsto G_\sigma$ est dite "continue" (ie : il existe une application continue φ_σ faisant passer de G_0 à G_σ)

On admet que si $\sigma \mapsto G'_\sigma \subset S(\sigma)$ est une autre déformation continue du cycle G_0 , alors G_σ et G'_σ sont deux cycles homologues dans $S(\sigma)$.

4.4 Théorème

Soient ω une $(n-1)$ -forme différentielle rationnelle dans $\mathbb{C}^n$ et $\sigma \mapsto G_\sigma$ une déformation continue du cycle G_0 .

L'application $e : D \rightarrow \mathbb{C}$ définie par $e(\sigma) = \int_{G_\sigma} \omega$ est holomorphe sur D et engendre une fonction analytique E multiforme définie sur $\mathbb{C}$ privé d'un ensemble fini de points.

preuve :

1° Si $\sigma \mapsto G'_\sigma$ est une autre déformation continue du cycle G_0 , on a admis que G_σ était homologue à G'_σ . $S(\sigma_0)$ est une variété analytique complexe de dimension $n-1$ et ω est de degré maximal dans $S(\sigma_0)$, donc la forme ω est fermée et le théorème de Stokes

montre que $e(\sigma) = \int_{G_\sigma} \omega = \int_{G'_\sigma} \omega$. Nous pouvons donc supposer que $G_\sigma = \varphi_\sigma(G_0)$ où φ_σ a été défini en 4.3

ω est une $(n-1)$ -forme différentielle rationnelle dans $\mathbb{C}^n$, donc

$$\omega = \sum_{j=1}^n R_j(z) dz_1 \wedge \dots \wedge \widehat{dz_j} \wedge \dots \wedge dz_n$$

où $\wedge$ signifie $\neq$ que l'on a supprimé dz_j et où R_j est une fonction rationnelle dont le dénominateur ne s'annule pas sur $|G_0|$. Pour simplifier, considérons $\omega = \frac{A(z)}{B(z)} dz_1 \wedge dz_2 \wedge \dots \wedge dz_{n-1}$ où A et B sont 2 polynômes et B ne s'annule pas sur $|G_0|$. Par continuité, il existe un voisinage W de $|G_0|$ du type 4.3 tel que B ne s'annule pas non plus sur W . Alors :

$$\forall \sigma \in D \quad e(\sigma) = \int_{G_\sigma} \omega = \int_{\varphi_\sigma(G_0)} \omega = \int_{G_0} \varphi_\sigma^* \omega$$

où φ_σ^* est le "pull-back" de φ_σ :

$$\varphi_\sigma^* \omega(z) = \frac{A(\varphi_\sigma(z))}{B(\varphi_\sigma(z))} d\left(z_1 + \lambda(z, \sigma) \frac{\partial P}{\partial z_1}\right) \wedge \dots \wedge d\left(z_{n-1} + \lambda(z, \sigma) \frac{\partial P}{\partial z_{n-1}}\right)$$

$$\text{Or : } d\left(z_v + \lambda(z, \sigma) \frac{\partial P}{\partial z_v}\right) = dz_v + \left(\frac{\partial \lambda}{\partial z_v} dz_v + \frac{\partial \lambda}{\partial \bar{z}_v} d\bar{z}_v\right) \frac{\partial P}{\partial z_v} + \lambda(z, \sigma) d\left(\frac{\partial P}{\partial z_v}\right)$$

On sait déjà que l'application $\sigma \mapsto \lambda(z, \sigma)$ est analytique sur D et pour montrer que $e(\sigma)$ est analytique dans D , il reste à comprendre pourquoi $\frac{\partial \lambda}{\partial z_v}$ et $\frac{\partial \lambda}{\partial \bar{z}_v}$ sont des fonctions analytiques de σ . Pour cela, considérons

l'égalité : $P(z + \lambda(z, \sigma) \overline{\text{grad } P(z)}) = \sigma$

que nous dérivons par rapport à z_v , puis par rapport à $\bar{z}_v$:

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^n \frac{\partial P}{\partial z_j} \left(\delta_{jv} + \frac{\partial \lambda}{\partial z_v} \cdot \frac{\partial P}{\partial z_j} + \lambda(z, \sigma) \frac{\partial}{\partial z_v} \left(\frac{\partial P}{\partial z_j} \right) \right) = 0 \\ \sum_{j=1}^n \frac{\partial P}{\partial \bar{z}_j} \left(\frac{\partial \lambda}{\partial \bar{z}_v} + \frac{\partial \lambda}{\partial z_v} \cdot \frac{\partial P}{\partial \bar{z}_j} + \lambda(z, \sigma) \frac{\partial}{\partial \bar{z}_v} \left(\frac{\partial P}{\partial \bar{z}_j} \right) \right) = 0 \end{cases}$$

où $z_v = x_v + iy_v$ et $\frac{\partial \bar{z}_v}{\partial z_v} = \frac{1}{2}(1+i)$. Il existe donc 2 polynômes B et C à coefficients dans $\mathbb{C}$ et à $2n$ variables $x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n$ tels que :

$$\begin{cases} \frac{\partial P}{\partial \bar{z}_v} + \frac{\partial \lambda}{\partial \bar{z}_v} |\text{grad } P(z)|^2 + \lambda(z, \sigma) \cdot B(x_1, \dots, y_n) = 0 \\ \frac{1}{2}(1+i) \frac{\partial P}{\partial \bar{z}_v} + \frac{\partial \lambda}{\partial \bar{z}_v} |\text{grad } P(z)|^2 + \lambda(z, \sigma) C(x_1, \dots, y_n) = 0 \end{cases}$$

Pour tout $z \in W$, $|\text{grad } P(z)| \neq 0$ et $\frac{\partial \lambda}{\partial \bar{z}_v}$ (resp. $\frac{\partial \lambda}{\partial \bar{z}_v}$) s'exprime en fonction de l'application analytique $\sigma \mapsto \lambda(z, \sigma)$. L'analyticité de ces 2 fonctions provient donc de celle de λ .

Cela prouve que $e(\sigma)$ est analytique dans D .

2° Prolongement analytique de e

n points $S_1, \dots, S_n$ de $\mathbb{C}^n$ définissent un $(n-1)$ -simplexe de $\mathbb{C}^n$ noté $E(S_1, \dots, S_n) = \{S = u_1 S_1 + \dots + u_n S_n \mid u_i \geq 0 \text{ et } \sum u_i = 1\}$

Lorsque W est l'ouvert défini au lemme 4.2, on a $|E(S_1, \dots, S_n)| \subset W$ dès que les n points $S_1, \dots, S_n$ appartiennent à W et sont suffisamment proche 2 à 2. $\varphi_{\sigma_0}(E(S_1, \dots, S_n))$ est alors une $(n-1)$ -chaîne de $S(\sigma_0)$ et :

lemme 1 (admis) : G_0 est homologue à $\varphi_{\sigma_0}(E_1) + \dots + \varphi_{\sigma_0}(E_J)$ où $E_j = E(S_1^j, \dots, S_n^j)$ ($1 \leq j \leq J$) désignent des $(n-1)$ -simplexes de $\mathbb{C}^n$ du type précédent.

Comme ω est fermée sur $S(\sigma_0)$, $\int_{G_0} \omega = \sum_{j=1}^J \int_{\varphi_{\sigma_0}(E_j)} \omega$.

Plus généralement, si $\sigma \in D$ les applications φ_σ projettent aussi $E_1, \dots, E_J$ sur des $(n-1)$ -chaînes de $S(\sigma)$ et :

$$e(\sigma) = \int_{G_\sigma} \omega = \sum_{j=1}^J \int_{\varphi_\sigma(E_j)} \omega = e_1(\sigma) + \dots + e_J(\sigma)$$

$$\text{où } e_j(\sigma) = \int_{\varphi_\sigma(E_j)} \omega = \int_{E_j} \varphi_\sigma^*(\omega)$$

$$e_j(\sigma) = \int_{E_j} \frac{A(\varphi_\sigma(z))}{B(\varphi_\sigma(z))} d(\varphi_\sigma^*(z_1)) \wedge \dots \wedge d(\varphi_\sigma^*(z_{n-1}))$$

où $\varphi_\sigma^*(z_i) = z_i \circ \varphi_\sigma : W \rightarrow \mathbb{C}$ exprime la i -coordonnée de $\varphi_\sigma(z)$ en fonction de z . Donc $\varphi_\sigma(z) = (\varphi_\sigma^1(z), \dots, \varphi_\sigma^{n-1}(z))$ et :

$$e_j(\sigma) = \int_{E_j} \frac{A(\varphi_\sigma(z))}{B(\varphi_\sigma(z))} d\varphi_\sigma^1 \wedge \dots \wedge d\varphi_\sigma^{n-1}$$

En se ramenant au $(n-1)$ -simplexe standard $\Delta_{n-1} = \{ (t_1, \dots, t_{n-1}) / t_i \geq 0 \text{ et } \sum t_i \leq 1 \}$, on obtient :

$$e_j(\sigma) = \int_{\Delta_{n-1}} R(\sigma, t_1, \dots, t_{n-1}) dt_1 \dots dt_{n-1}$$

Lemme 2 (admis) : $R(\sigma, t_1, \dots, t_{n-1})$ est une branche d'une fonction algébrique dans l'espace à n dimensions $(\sigma, t_1, \dots, t_{n-1})$.

En particulier de telles fonctions R sont des branches d'une fonction de la classe de Nilsson et le corollaire 3.22 permet d'affirmer que $e(\sigma)$ se prolonge analytiquement pour donner une fonction $E(\sigma)$ de classe de Nilsson dans $\mathbb{C} \setminus q^{-1}(\omega)$ (où $q^{-1}(\omega)$ est un ensemble fini de points) Ce qui prouve le théorème 4.4.

CQFD

4.5 Théorème (Développement de Puiseux de E à l'infini)

Avec les notations du théorème 4.4, il existe $R > 0$ tel que E soit définie sur $\{\sigma \in \mathbb{C} / |\sigma| > R\}$ et vérifie

$$E(\sigma) = E_0(\sigma) + E_1(\sigma) \ln \sigma + \dots + E_{n-1}(\sigma) (\ln \sigma)^{n-1}$$

où $E_0, \dots, E_{n-1}$ sont des séries de Puiseux à l'infini, c.à.d qu'il existe $s \in \mathbb{N}$, des entiers relatifs $m(0), \dots, m(n-1)$ et des complexes

$c_{j,v}$ tels que :

$$E_j(\sigma) = \sum_{v=-\infty}^{m(j)} c_{j,v} \sigma^{\frac{v}{s}}$$

$$\text{où } \sum_{v=-\infty}^{m(j)} |c_{j,v}| R^{\frac{v}{s}} < \infty$$

preuve: $E(\sigma)$ a été obtenue en intégrant une fonction algébrique.

On sait qu'une fonction algébrique est quasi-unipotente et l'on admettra que l'intégration d'une fonction algébrique quasi-unipotente est quasi-unipotente (voir l'article [NIL2] de Wilsson)

$E(\sigma)$ est donc une fonction de classe de Wilsson quasi-unipotente et définie sur $|z| > R$ pour R assez grand.

L'application $D^* = \{z \in \mathbb{C} / |z| < 1\} \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{C}$
 $z \longmapsto E\left(\frac{R}{z}\right)$

est une fonction de classe de Wilsson quasi-unipotente d'après la proposition 2.21. Le Théorème de Puiseux 1.36 montre l'existence d'un ensemble fini d'indices I , de constantes $\sigma_i \in \mathbb{Q}$ et de polynômes P_i dont les coefficients sont des fonctions holomorphes φ_{ij} sur D^* qui se prolongent en fonctions méromorphes sur tout le disque D , tels que :

$$0 < |z| < 1 \quad E\left(\frac{R}{z}\right) = \sum_{i \in I} z^{\sigma_i} P_i(\ln z)$$

Le point 0 n'est pas une singularité essentielle des φ_{ij} et le développement de Laurent de φ_{ij} s'écrit $\varphi_{ij}(z) = \sum_{k \geq K_{ij}} c_{ij}^{(k)} z^k$ où $K_{ij} \in \mathbb{Z}$

Ainsi : $0 < |z| < 1 \quad E\left(\frac{R}{z}\right) = \sum_{i \in I} \sum_{j=0}^{n(i)} \sum_{k \geq K_{ij}} c_{ij}^{(k)} z^{k+\sigma_i} (\ln z)^j$

Pour z fixé, cette famille est absolument sommable, donc commutativement sommable et :

$$0 < |z| < 1 \quad E\left(\frac{R}{z}\right) = \sum_{j=0}^m \left(\sum_{v=-\infty}^{+\infty} c_{j,v} z^{\frac{v}{\delta}} \right) (\ln z)^j$$

Mais $\sigma = \frac{R}{z}$, où $|\sigma| > R$, donc :

$$E(\sigma) = \sum_{j=0}^m \left(\sum_{v=-\infty}^{-m(j)} c_{j,-v} R^{-\frac{v}{\delta}} \sigma^{\frac{v}{\delta}} \right) (\ln R - \ln \sigma)^j$$

ce qui est le développement de Puiseux de E annoncé en 4.5.

CQFD

RESUMES

Fonctions de classe de Wilsson : Résumé

I Fonctions analytiques multiformes

X = variété analytique complexe connexe de dimension $n \geq 1$

$\mathcal{O}(U)$ = eno. des fonctions holomorphes sur $U \subset X$

* Définition : Soit $f_0 \in \mathcal{O}_{x_0}$ et γ un chemin de X d'origine x_0 . On dit que le germe f_0 se prolonge analytiquement le long de γ si (1) ou (2) est vérifié :

(1) $\exists$ subdivision $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = 1$ et des voisinages ouverts Ω_i des ensembles $\gamma([t_i, t_{i+1}])$, et des $F_i \in \mathcal{O}(\Omega_i)$ $0 \leq i \leq n-1$ tels que

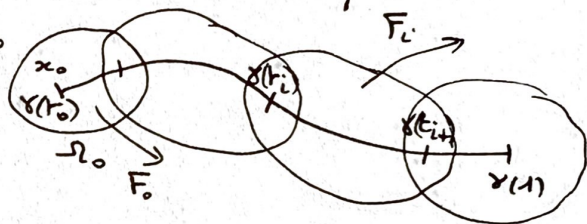
$$F_i = F_{i+1} \text{ sur } \Omega_i \cap \Omega_{i+1} \text{ et } \rho_{x_0}(F_0) = f_0$$

(2) $\exists \{ \varphi_t \in \mathcal{O}_{\gamma(t)} / 0 \leq t \leq 1 \}$ telle que

$$\begin{cases} \varphi_0 = f_0 \in \mathcal{O}_{x_0} \\ \text{et} \end{cases}$$

$$\left\{ \forall z \in [0, 1] \exists T \in [0, 1] \ z \in T \exists U \subset X \ \gamma(T) \in U \exists f \in \mathcal{O}(U) \ \forall t \in T \ \rho_{\gamma(t)}(f) = \varphi_t \right.$$

On note $(f_0)_\gamma$ le germe obtenu par prolongement de $f_0 \in \mathcal{O}_{x_0}$ le long de γ .



* Si $\hat{\mathcal{O}} = \bigcup_{x \in X} \mathcal{O}_x$ est muni de la topologie dont une base est formée des ensembles $[U, f] = \{ \rho_x(f) / x \in U \}$ où $U \subset X$ et $f \in \mathcal{O}(U)$, $\pi: \hat{\mathcal{O}} \rightarrow X$ est un revêtement non ramifié (ie un homéomorphisme $\varphi \in \mathcal{O}_x \mapsto x$ local), et on a la caractérisation :

Proposition (1.8 p 7) : $f_0 \in \mathcal{O}_{x_0}$; $\gamma \in \mathcal{C}(x_0, x)$; le germe f_0 se prolonge analytiquement le long de γ si γ peut être relevé en un chemin $\hat{\gamma}$ de $\hat{\mathcal{O}}$ d'origine f_0 .

La proposition précédente et le Théorème du relèvement de 2 chemins homotopes ([FOR]) donnent alors le théorème de monodromie.

Théorème de monodromie :

Si γ et δ sont 2 chemins homotopes d'origine a et d'extrémité b , notons A_s la déformation continue faisant passer de γ à δ . Si $f_0 \in \mathcal{O}_a$ est un germe qui se prolonge analytiquement le long de tous les chemins A_s ($0 \leq s \leq 1$), alors les prolongements de f_0 le long de γ et le long de δ donnent le même germe en b : $(f_0)_\gamma = (f_0)_\delta$.

* Définition : Si $x_0 \in X$ et $f_0 \in \mathcal{O}_{x_0}$, f_0 définit une fonction analytique multiforme F sur X si f_0 se prolonge sur tout chemin γ d'origine x_0 de X

$F: X \rightarrow \mathbb{C}$ possède plusieurs valeurs.

$$x \mapsto (f_0)_\gamma(x)$$

$(f_0)_\gamma$ est une branche locale de F en x et on note $S_F(x) = \{ (f_0)_\gamma / \gamma \in \mathcal{C}(x_0, x) \}$ l'ensemble de ces branches locales.

On montre que cette définition est indépendante du point x_0 (cf. 1.14 p 11) et on note $HO(X)$ l'ensemble des fonctions multiformes sur X .

Proposition : $\forall F \in HO(X) \quad \forall x, y \in X \quad S_F(x) \approx S_F(y)$

Il suffit de considérer l'application : $\psi: S_F(x) \rightarrow S_F(y) \quad \text{où } \delta \in \mathcal{C}(x, y)$
 $f \mapsto (f)_\delta$

* Fonctions multiformes comme sous-ensembles de $\hat{\mathcal{O}}$ (1.18 p 14)

Notons $\mathcal{W}$ l'ensemble des composantes connexes W de $\hat{\mathcal{O}}$ telles que $\pi(W) = X$ et vérifiant la propriété (P) :

(P) : $\forall x \in X \quad \exists U \subset X \quad x \in U \quad \exists V_j \subset \hat{\mathcal{O}}$ inclus dans W $\mathbb{Z}$ -à- $\mathbb{Z}$ disjoints tels que $\pi^{-1}(U) \cap W = \bigcup_{j \in \mathbb{Z}} V_j$ et $\pi|_{V_j}: V_j \rightarrow U$ soit un homéomorphisme.

Alors (cf. Pro. 1.19 p 14) : Il existe une bijection entre $HO(X)$ et $\mathcal{W}$, à savoir $HO(X) \rightarrow \mathcal{W}$ où W est la composante connexe de $f_0 \in \mathcal{O}_{x_0}$ branche de F
 $F \mapsto W$ en x_0 , dans $\hat{\mathcal{O}}$.

On peut alors éviter de parler de fonction multiforme :

$$\begin{array}{ccc} \tilde{W} & \xrightarrow{\tilde{F} \text{ est analyt. uniforme}} & \mathbb{C} \\ \downarrow \tilde{\pi} & & \uparrow \\ X & \xrightarrow{F \in HO(X)} & \mathbb{C} \end{array}$$

$\tilde{F}((f_0)_{\gamma, x}) = (f_0)_{\gamma, x}$

II Fonctions analytiques multiformes à détermination finie

* $S_F(x)$ engendre un seu $H_F(x) \subset \mathcal{O}_x$ et si $x, y \in X \quad H_F(x) \overset{\sim}{=} H_F(y)$, d'où :

Définition : $\forall F \in HO(X)$ F est à détermination finie (resp. détermination finie faible) si les sous-ensembles $S_F(x)$ sont finis (resp. les seu $H_F(x)$ sont de dimension finie)

* Exemples : $X = \mathbb{C}^*$ $F(z) = z^\alpha$ (où $\alpha \in \mathbb{C}$) et $G_m(z) = (\ln z)^m$ sont des fonctions de $HO(\mathbb{C}^*)$. Le groupe fondamental $\pi_1(\mathbb{C}^*)$ est engendré par la classe du chemin $(\mathcal{C}) = \gamma =$ cercle de centre 0 de rayon 1 parcouru dans le sens positif. Si T_γ désigne la transformation de monochromie,

$$T_\gamma: S_F(z) \rightarrow S_F(z)$$

$$z^\alpha \mapsto z^\alpha \cdot e^{i2\pi\alpha}$$

$$T_\gamma: S_{G_m}(z) \mapsto S_{G_m}(z)$$

$$(\ln z)^m \mapsto (\ln z + i2\pi)^m$$

$\dim H_F(z) = 1$ donc F est à détermination finie faible. F est à détermination finie ssi $\alpha \in \mathbb{Q}$ (ex: $\sqrt{z}$ est une f. ana. mult. à det. finie car $\#S_{\sqrt{z}}(z) = 2$)

$\dim H_{G_m}(z) = m+1$ donc G_m est à détermination finie faible car une base de $H_{G_m}(z)$ est $(1, \ln z, \dots, (\ln z)^m)$.

Si nous prenons $X = \mathbb{C}^* \setminus \{1\}$, $G(z) = \frac{1}{z}$ est une fonction analytique multiforme à détermination infinie. On $\ln z$ le voit en montrant que la famille $\left\{ \frac{1}{\ln z}, \frac{1}{\ln z + i2\pi}, \dots, \frac{1}{\ln z + ik2\pi} \right\}$ est libre pour tout $k \in \mathbb{N}$.

Si $P \in \mathbb{C}[X_1, \dots, X_n]$, $\ln(P(z)) \in H_O(\mathbb{C}^n \setminus P^{-1}(0))$ est à détermination finie faible car $H_{\ln P}(z)$ est de dimension 2. Notons ici le mode de construction de la fonction $\ln(P(z))$, mode qui sera repris d'une façon plus générale dans la suite du mémoire (cf. §D du chapitre 2, page 62)

* Fonctions analytiques mult. à détermination finie

Proposition 14.28 p 30: Soit $F \in H_O(X)$,

(1) Si F est à détermination finie faible, il existe m fonctions analytiques $s_1, \dots, s_m \in O(X)$ telles que $F^m + s_1 F^{m-1} + \dots + s_m = 0$

(2) Inversement, s'il existe $s_1, \dots, s_m \in O(X)$ telles que $F^m + s_1 F^{m-1} + \dots + s_m = 0$, et si $\forall x \in X$ le polynôme $Y^m + s_1(x) Y^{m-1} + \dots + s_m(x) = 0$ admet m racines complexes distinctes, alors F est à détermination finie

Théorème de Puiseux: Toute fonction analytique multiforme à détermination finie faible sur le disque épointé $D^* = \{z \in \mathbb{C} / 0 < |z| < 1\}$ est de la forme:

$$F(z) = \sum_{i \in I} z^{\sigma_i} P_i(\ln z) \quad (I \text{ fini}; \sigma_i \in \mathbb{C}; P_i \in O(D^*)[X])$$

III Classe de Nilsson (Chap. 2 p 38)

Soit $X = \mathbb{C}^n \setminus p^{-1}(0)$ où $p \in \mathbb{C}[X_1, \dots, X_n]$ non identiquement nul.

* Définitions: Si γ est un chemin polygonal de $\mathbb{C}^n$ de sommets $S_0, \dots, S_N$, le rang de γ est $L(\gamma) \in \mathbb{N}$. Si γ est un chemin de $\mathbb{C}^n \setminus p^{-1}(0)$, $L(\gamma) = \text{rang de } \gamma$ est le minimum des rangs des chemins polygonaux de $\mathbb{C}^n \setminus p^{-1}(0)$ homotopes à γ (dans $\mathbb{C}^n \setminus p^{-1}(0)$). Ainsi $L(\mu \circ \gamma) \leq L(\mu) + L(\gamma)$.

Soit $\rho: X \rightarrow \mathbb{R}_+$ et $F \in H_O(X)$. F est dite "localement bornée sous ρ " si $\forall x_0 \in X \quad \forall f_0 \in S_F(x_0) \quad \exists (C_n)_{n \in \mathbb{N}}$ suite de $\mathbb{R}_+^*$ telle que $\forall \gamma \in \mathcal{C}(x_0, x) \quad |f_0)_\gamma(x)| \leq C_{L(\gamma)} \rho(x)$

NB: On peut supposer $(C_n)_n$ croissante, et il suffit de vérifier la propriété en un seul point $x_0 \in X$ et pour un seul germe $f_0 \in S_F(x_0)$ fixés.

On dit que $F \in H_O(X)$ est à croissance tempérée si elle est localement bornée sous $\rho_{m,w}(z) = \frac{(1+|z|)^m}{|p(z)|^w}$ où $(m, w) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ et $X = \mathbb{C}^n \setminus p^{-1}(0)$.

Remarques: • $F \in \mathcal{H}O(\mathbb{C}^n \setminus p^{-1}(0))$ à détermination finie et à croissance tempérée est telle qu'il existe $(m, w) \in \mathbb{N}^2$ et $C > 0$ / $\forall z \in X$ $|F(z)| \leq C \frac{(1+|z|)^m}{|p(z)|^w}$

(preuve: Tout point $z_0 \in X$ peut être joint à $z \in X$ par un chemin polygonal γ dans X de rang $L(\gamma) \leq 3 \deg p + 1$. On utilise aussi le fait que l'appl. de $S_F(z_0)$ vers $S_F(z) = \{\beta_{1,z}, \dots, \beta_{s,z}\}$ qui à β_0 associe $(\beta_0)_\gamma$ est une bijection. cf p40)

• $F \in \mathcal{O}(\mathbb{C}^n \setminus p^{-1}(0))$ est à croissance tempérée ssi il existe $w \in \mathbb{N}$ et un polynôme g tel que $F = \frac{g}{p^w} =$ fonction rationnelle.

(preuve: $g = p^w F$ est analytique sur X et $|g(z)| \leq C(1+|z|)^m$. g est donc localement bornée sur $\mathbb{C}^n$ et d'après le th. d'extension de Riemann g se prolonge en une fct entière de $\mathbb{C}^n$ qui n'est autre qu'un polynôme de degré $\leq m$ d'après le th. de Liouville.)

* Définition de la classe de Wilsson:

$\mathcal{W}(\mathbb{C}^n \setminus p^{-1}(0)) = \{ F \in \mathcal{H}O(\mathbb{C}^n \setminus p^{-1}(0)) / F \text{ à det. finie faible et à croissance tempérée} \}$

$\mathcal{W} = \bigcup \mathcal{W}(\mathbb{C}^n \setminus p^{-1}(0)) =$ classe de Wilsson sur $\mathbb{C}^n$. Si $f \in \mathcal{W}$, on note souvent $V(f)$ l'ensemble $p^{-1}(0)$.

IV Fonctions algébriques (p43)

* Définition des fonctions algébriques

$\mathcal{A}(\mathbb{C}^n \setminus p^{-1}(0)) = \{ F \in \mathcal{H}O(\mathbb{C}^n \setminus p^{-1}(0)) / F \text{ à det. finie et à croissance tempérée} \}$

$\mathcal{A} = \bigcup_p \mathcal{A}(\mathbb{C}^n \setminus p^{-1}(0)) =$ ens. des fonctions algébriques sur $\mathbb{C}^n$.

Proposition: $F \in \mathcal{H}O(\mathbb{C}^n \setminus p^{-1}(0))$. Alors $F \in \mathcal{A}(\mathbb{C}^n \setminus p^{-1}(0))$ ssi il existe m fonctions rationnelles $s_j = \frac{A_j}{p^{v_j}}$ telles que $F^m + s_1 F^{m-1} + \dots + s_m = 0$, le polynôme $Y^m + \dots + s_m F(x) = 0$ n'ayant que des racines simples pour tout $x \in \mathbb{C}^n \setminus p^{-1}(0)$

Ainsi F est un élément algébrique sur $\mathbb{C}(x)$. Dans le but d'étudier les zéros d'une fonction algébrique, on établit les propositions suivantes:

* Proposition (2.11 p 45): Il existe une bijection entre l'ensemble des fonctions algébriques sur $\mathbb{C}$ et l'ensemble des polynômes irréductibles de $\mathbb{C}[Y, x]$.

preuve: Si $F \in \mathcal{A}(\mathbb{C}^n \setminus p^{-1}(0))$, $S_F(x) = \{\beta_{1,x}, \dots, \beta_{m,x}\}$ et

$$\prod_{i=1}^m (Y - \beta_{i,x}(x)) = Y^m + s_1(x) Y^{m-1} + \dots + s_m(x)$$

De plus $s_j(x) = \frac{A_j}{p^{v_j}}$ d'après la proposition ci-dessus. En supprimant les fractions rationnelles s_j irréductibles, on obtient $H(Y, x) = p^w(x) Y^m + A_1(x) Y^{m-1} + \dots + A_m(x)$ où $w = \sup v_j$. H s'appelle le polynôme associé à F , est parfaitement déterminé à une constante multiplicative près et vérifie $p^w F^m + \dots + A_m = 0$.

1) $H(Y, x)$ est irréductible dans $\mathbb{C}[Y, x]$: $H(Y, x)$ est primitif dans $\mathbb{C}(x)[Y]$, donc $H(Y, x)$ irréductible dans $\mathbb{C}[Y][x] \Leftrightarrow H$ irréductible dans $\mathbb{C}(x)[Y]$.
Si, par l'absurde, $H = H_1 H_2$ où $H_i \in \mathbb{C}(x)[Y]$, $\deg H_i < m$, il existe un polynôme $q(x)$ tel que
(1) H_1 et H_2 n'ont pas de racines communes lorsque $x \in \mathbb{C} \setminus p^{-1}(0)$
(2) Tous les zéros de $H_1(Y, x)$ sont simples si $x \in \mathbb{C} \setminus p^{-1}(0)$.
Les zéros de H_1 sont alors les branches locales d'une f. ana. multiforme, absurde.

2) Réciproque : si $H(Y, x)$ est irréductible dans $\mathbb{C}[Y, x]$, on écrit :

$$H(Y, x) = 0 \Leftrightarrow Y^m + \frac{q_{m-1}(x)}{q_m} Y^{m-1} + \dots + \frac{q_0(x)}{q_m} = 0 \quad \forall x \in \mathbb{C} \setminus q_m^{-1}(0)$$

$$\Delta(x) = \frac{B(x)}{q_m^w(x)} = \text{discriminant de ce polynôme} \quad \text{Posons } p = B q_m, \text{ si } x \in \mathbb{C} \setminus p^{-1}(0)$$

$Y \mapsto H(Y, x)$ possède m racines distinctes $z_1, \dots, z_m$. Si $x_0 \in \mathbb{C} \setminus p^{-1}(0)$ est fixé, $\exists f_0 \in \mathcal{O}_{x_0}$ se prolongeant le long de tout chemin de $\mathbb{C} \setminus p^{-1}(0)$ on $F \in \mathcal{H}(\mathbb{C} \setminus p^{-1}(0))$ telle que $f_0(x_0) = w_0$ et $\forall x \in \mathbb{C} \setminus p^{-1}(0) \quad q_m F^m + q_{m-1} F^{m-1} + \dots + q_0 = 0$ dans $\mathcal{O}_x$ (cf 1.29 p 31)
 Ce prop. 2.11 montre que F est algébrique. Comme H est irréductible, c'est le polynôme associé à F (à $\lambda \in \mathbb{C}$ près)
 C.F.D

Définition : $A \in \mathcal{A}(\mathbb{C})$ et $H(Y, x) = q_m(x) Y^m + \dots + q_0(x)$ son polynôme irréductible associé. On note $\beta(A) = m$ le nombre de branches locales de A et $\delta(A) = \sup \{ \deg q_i \mid 0 \leq i \leq m \}$. $d(A) \doteq \beta(A) + \delta(A)$ s'appelle le degré total de la fct algébrique A .

Lemme (2.13 p 47) : $A, B \in \mathcal{A}(\mathbb{C})$ et $\alpha \in S_A(\sigma_0)$; $\beta \in S_B(\sigma_0)$.

(1) $\alpha + \beta$ engendre une f.a.n.a. multiforme R qui est algébrique et :

$$(i) \begin{cases} \beta(R) \leq \beta(A) \cdot \beta(B) \\ \delta(R) \leq \beta(A) \delta(B) + \beta(B) \delta(A) \end{cases}$$

(2) $\alpha \cdot \beta$ engendre un f.a.n.a. mult. qui est algébrique et qui vérifie (i).

Proposition (2.14 p 50) : (Racines réelles de $A \in \mathcal{A}(\mathbb{C})$)

Soit $A \in \mathcal{A}(\mathbb{C} \setminus q^{-1}(0))$ telle que $[0, 1] \cap q^{-1}(0) = \emptyset$ et $\alpha(t)$ une branche locale de A définie au voisinage de $[0, 1]$. De 2 choses l'une :

(1) ou bien $\Im m \alpha(t) \equiv 0$ sur $[0, 1]$

(2) ou bien $t \mapsto \Im m \alpha(t)$ possède au plus $2 \cdot \beta(A) \delta(A)$ zéros sur $[0, 1]$.

II Chemins algébriques réguliers de $\mathbb{C}^n$ (p 52)

Définition : $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}^n$ est un chemin algébrique régulier de $\mathbb{C}^n$ si $\gamma(t) = (\alpha_1(t), \dots, \alpha_n(t))$ où α_i est la branche locale d'une fonction algébrique A_i de $\mathbb{C}$. Le rang total de γ est l'entier $d(\gamma) = \sup \{ d(A_i) \mid 1 \leq i \leq n \}$

exemple : Un chemin polynomial $\gamma(t) = (p_1(t), \dots, p_n(t))$ est un chemin algébrique régulier de rang total $d(\gamma) = \sup \deg p_i + 1$

Théorème (2.19 p 57) : Soient $p \in \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$ et $w \in \mathbb{N}^*$.

$\exists \chi(w) \in \mathbb{N} \mid \forall \gamma$ chemin de $\mathbb{C}^n \setminus p^{-1}(0)$ homotope à un chemin algébrique régulier de rang total $\leq w$ on a : $L(\gamma) \leq \chi(w)$

La preuve nécessite 2 lemmes techniques (pro 2.16 p 52 et lemme 2.18 p 55) et n'a été faite en détail que dans le cas où $n = 1$. Pour $n \geq 1$, on a donné une esquisse de démonstration.

Le théorème précédent permet d'obtenir de nombreuses propriétés des fonctions de classe de Wilsson :

VI Images algébriques de fonctions de classe de Wilsson

Proposition (2.21 p 66) : Soit $1 \leq i \leq m$, considérons :

$$A_i \in \mathcal{A}(\mathbb{C}^n \setminus p_i^{-1}(0))$$

$z_0 \in \mathbb{C}^n \setminus (p_1 \dots p_m)^{-1}(0)$ et $\alpha_i \in S_{A_i}(z_0)$. Si $z \in D_0$ est voisin de z_0 , notons $\alpha(z) = (\alpha_1(z), \dots, \alpha_m(z))$ et $S_0 = \alpha(z_0)$.

$$p \in \mathbb{C}[X_1, \dots, X_m] / p(S_0) \neq 0$$

Alors il existe $q \in \mathbb{C}[X_1, \dots, X_n]$ tel que pour toute $F \in H_0(\mathbb{C}^m \setminus p^{-1}(0))$ et pour toute $f_0 \in S_F(S_0)$, le germe $f_0(\alpha(z)) \in \mathcal{O}_{z_0}$ définit une fonction $G \in H_0(\mathbb{C}^n \setminus q^{-1}(0))$.

On définit l'application : $\alpha^* : H_0(\mathbb{C}^m \setminus p^{-1}(0)) \longrightarrow H_0(\mathbb{C}^n \setminus q^{-1}(0))$
 $F \longmapsto G$

(1) Si F est à dét. finie faible, $\alpha^*(F)$ l'est aussi

(2) $\alpha^*(\mathcal{N}(\mathbb{C}^m \setminus p^{-1}(0))) \subset \mathcal{N}(\mathbb{C}^n \setminus q^{-1}(0))$

preuve :

Posons $R(z) = p_1(z) \dots p_m(z)$, de sorte que $A_i \in \mathcal{A}(\mathbb{C}^n \setminus R^{-1}(0))$

$$S_{A_1 \dots A_m}(z) = \{(\alpha_{1,\gamma}, \dots, \alpha_{m,\gamma}) \in \mathcal{O}_z^m / \gamma \in \mathcal{P}(z_0, z) \text{ dans } \mathbb{C}^n \setminus R^{-1}(0)\}$$

où $\alpha_{i,\gamma} = (\alpha_i)_\gamma$.

$$S_{A_1 \dots A_m}(z) \subset S_{A_1}(z) \times \dots \times S_{A_m}(z) \text{ est}$$

un sous-ensemble fini de $\mathcal{O}_z^m$, de cardinal $\# S_{A_1 \dots A_m}(z) = \kappa \leq \beta(A_1) \dots \beta(A_m)$

$\forall z = (z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n \setminus R^{-1}(0)$ $P(z_1, \dots, z_n) = \prod_{j=1}^{\kappa} p(\alpha_{1,j}(z), \dots, \alpha_{m,j}(z))$ est un polynôme symétrique en $(\alpha_{1,j}(z), \dots, \alpha_{m,j}(z))_{1 \leq j \leq \kappa}$ et définit d'après le lemme 4.14 une fonction analytique uniforme sur $\mathbb{C}^n \setminus R^{-1}(0)$.

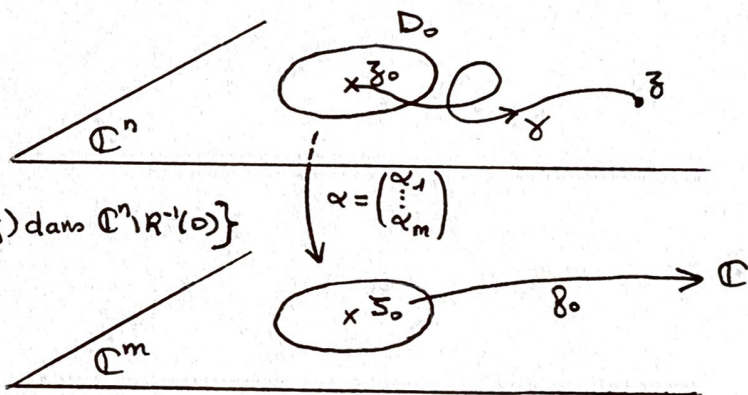
Comme $A_1, \dots, A_m$ sont des fonctions algébriques régulières, $P(z)$ est à croissance tempérée donc de la forme :

$$P(z) = \frac{B(z)}{R(z)^w} \quad (B(z) \text{ polynôme, } w \in \mathbb{N})$$

$$\text{Posons } q(z) = R(z) \cdot B(z)$$

Le germe $f_0(\alpha(z)) \in \mathcal{O}_{z_0}$ définit une fonction analytique multiforme G sur $\mathbb{C}^n \setminus q^{-1}(0)$:

Pour le voir, on retourne à la définition. Si γ est un chemin de $\mathbb{C}^n \setminus q^{-1}(0)$ d'origine z_0 , on note γ^* le chemin de $\mathbb{C}^m \setminus p^{-1}(0)$ défini par $\gamma^*(t) = \alpha_{\gamma_t}(\gamma(t))$ où $\alpha_{\gamma_t} = (\alpha_{1,\gamma_t}, \dots, \alpha_{m,\gamma_t})$ et où γ_t est le chemin partiel $\gamma : [0, t] \rightarrow \mathbb{C}^n$ et on utilise le fait que f_0 se prolonge le long de γ^* .



En notant $g = f_0(\alpha(z)) \in \mathcal{O}_{\mathbb{A}^n}$, on montre facilement que g se prolonge le long de γ et: $(g)_\gamma = (f_0)_\gamma \circ \alpha_\gamma$. Supposons maintenant que $F \in \mathcal{W}(\mathbb{C}^m, p^{-1}(0))$,

• G est à détermination finie faible:

Comme $(f_0)_\gamma = \sum_{i=1}^l c_i \varphi_i$ on a $(g)_\gamma = \sum_{i=1}^l c_i (\varphi_i \circ \alpha_\gamma)$

$S_G(z)$ est un s.e.v inclus dans l'espace engendré par la famille finie $\{(\varphi_i \circ \alpha_{j_1, \dots, j_m}) / 1 \leq i \leq l \text{ et } 1 \leq j_k \leq \beta(A_k)\}$ où $\alpha_{j_1, \dots, j_m} = (\alpha_{j_1}, \dots, \alpha_{j_m})$

Ainsi $\dim_{\mathbb{C}} H_G(z) \leq \beta(A_1) \times \dots \times \beta(A_m) \cdot \dim_{\mathbb{C}} H_F(z)$.

• G est à croissance tempérée:

On peut supposer que γ est un chemin polygonal. Il existe une subdivision $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_N = 1$ où $N = L(\gamma)$ telle que $\gamma(t_i)$ soient les sommets du chemin polygonal.

γ_i^* = chemin de $\mathbb{C}^m \setminus p^{-1}(0)$ défini par $\gamma_i^*(t) = \alpha_{\gamma_i(t)}(\gamma_i(t))$ pour $t_i \leq t \leq t_{i+1}$

En notant $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_m)$, on a

$$\gamma_i^* = \alpha \circ \gamma_i : [t_i, t_{i+1}] \longrightarrow \begin{pmatrix} \mathbb{C}^n \\ \alpha_1(\gamma_i(t)) \\ \vdots \\ \alpha_m(\gamma_i(t)) \end{pmatrix}$$

γ_i^* est un chemin algébrique régulier de rang $d(\gamma_i^*) = \sup_{1 \leq j \leq m} d(\alpha_j \circ \gamma_i) = \sup_{1 \leq j \leq m} d(A_j)$.
Notons $\omega = \sup_{1 \leq j \leq m} d(A_j)$.

$$\gamma^* = \gamma_{N-1}^* \circ \dots \circ \gamma_0^* \Rightarrow L(\gamma^*) \leq \sum_{i=0}^{L(\gamma)-1} L(\gamma_i^*) \leq L(\gamma) \cdot \chi(\omega) \text{ d'après le théorème 2.19.}$$

Notons $z = \gamma(1)$, la croissance tempérée de F donne:

$$|(g)_\gamma(z)| = |(f_0)_\gamma(\alpha_\gamma(z))| \leq C_{L(\gamma^*)} \frac{(1 + |\alpha_\gamma(z)|)^{m'}}{|p(\alpha_\gamma(z))|^{w'}}, \text{ (où } (C_n) \text{ croissante)}$$

On majore $C_{L(\gamma^*)} \leq C'_{L(\gamma)} = C_{L(\gamma)} \cdot \chi(\omega)$ et par des transformations successives, on arrive à trouver $(m'', w'') \in \mathbb{N}^2$ tels que $|(g)_\gamma(z)| \leq C''_{L(\gamma)} \frac{(1 + |z|)^{m''}}{|\gamma(z)|^{w''}}$

(cf. p 69)

CQFD

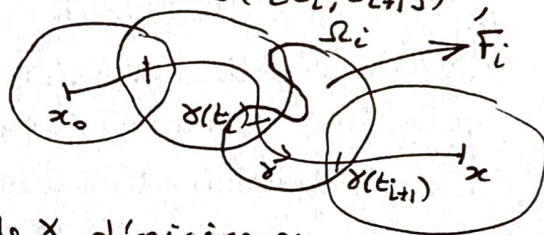
Classe de Wilsson

Le but du mémoire est de se familiariser avec les fonctions de classe de Wilsson et de démontrer le théorème d'intégration de Wilsson sans faire appel aux travaux d'Hironaka sur la désingularisation.

I Fonctions analytiques multiformes

X = variété analytique complexe connexe de dimension $n \geq 1$

* Définition : Soient $x_0 \in X$, $f_0 \in \mathcal{O}_{x_0}$ et $\gamma \in \mathcal{C}(x_0, x)$ un chemin d'origine x_0 . Le germe se prolonge analytiquement le long du chemin γ si il existe une subdivision $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = 1$, $\exists \Omega_i$ voisinages ouverts de $\gamma([t_i, t_{i+1}])$, $\exists F_i \in \mathcal{O}(\Omega_i)$ /

$$\begin{cases} F_i = F_{i+1} \text{ sur } \Omega_i \cap \Omega_{i+1} \\ \varphi_x(F_0) = f_0 \end{cases}$$


On note $(f_0)_\gamma$ le germe obtenu en $\gamma(1) = x$.

Si f_0 se prolonge le long de tout chemin γ de X d'origine x_0 , f_0 détermine une fct analytique multiforme $F: X \rightarrow \mathbb{C}$

$$x \mapsto (f_0)_\gamma(x)$$

Cette définition ne dépend pas de x_0 et on note $\text{MO}(X)$ l'ensemble des fct. ana. mult. sur X .

$S_F(x) = \{ (f_0)_\gamma / \gamma \in \mathcal{C}(x_0, x) \} = \text{ens. des branches locales de } F \text{ en } x$.

$H_F(x) = \text{sev engendré dans } \mathcal{O}_x \text{ par l'ensemble } S_F(x)$

Théorème de Monodromie :

Si $x_0 \in X$, $f_0 \in \mathcal{O}_{x_0}$ se prolonge sur tous les chemins $\gamma \in \mathcal{C}(x_0, x)$, et si γ et δ sont 2 chemins de $\mathcal{C}(x_0, x)$ homotopes à extrémités fixes, alors $(f_0)_\gamma = (f_0)_\delta$

Proposition : $\forall F \in \text{MO}(X) \quad \forall x, y \in X \quad S_F(x) \simeq S_F(y) \text{ et } H_F(x) \overset{\text{ev}}{\simeq} H_F(y)$

Il suffit de prendre : $S_F(x) \rightarrow S_F(y)$ où $\delta \in \mathcal{C}(x, y)$ fixé.

$$f \mapsto (f)_\delta$$

* Définition : $\text{FMO}(X)$ est à détermination finie (resp. à détermination finie faible) si les sous-ensembles $S_F(x)$ sont finis (resp. si les sev $H_F(x)$ sont de dimension finie).

exemples: 1) $X = \mathbb{C}^*$ $F(z) = z^\alpha$ ($\alpha \in \mathbb{C}$) est à détermination finie si $\alpha \in \mathbb{Q}$, finie faible si $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Q}$. Le groupe fondamental $\pi_1(\mathbb{C}^*)$ est engendré par la classe d'homotopie du cercle $|z|=1$ parcouru 1 fois dans le sens direct, noté γ . Si $f_0 = z^\alpha \in \mathcal{O}_1$ $(f_0)_\gamma = z^\alpha \cdot e^{i2\pi\alpha}$ d'où $S_F(1) = \{ z^\alpha e^{i2\pi k\alpha} / k \in \mathbb{Z} \}$

2) $X = \mathbb{C}^*$ $G_m(z) = (\ln z)^m$ est à détermination finie faible car $\dim_{\mathbb{C}} H_{G_m}(z) = m+1$.

3) $X = \mathbb{C}^* \setminus \{1\}$ $H(z) = \frac{1}{\ln z}$ est à détermination infinie car la famille de germes en $z \in \mathbb{C}^* \setminus \{1\}$: $\{ \frac{1}{\ln z}, \dots, \frac{1}{\ln z + k i 2\pi} \}$ est libre $\forall k \in \mathbb{Z}$.

4) $P \in \mathbb{C}[X_1, \dots, X_n]$ $\ln(P(z)) \in H^0(\mathbb{C}^n \setminus p^{-1}(0))$ est à détermination finie faible.

Proposition (1.28 p30): Soit $F \in H^0(X)$

(1) Si F est à détermination finie, $\exists s_1, \dots, s_m \in \mathcal{O}(X) / F^m + s_1 F^{m-1} + \dots + s_m = 0$ (1)

(2) Inversement s'il existe $s_1, \dots, s_m \in \mathcal{O}(X)$ vérifiant (1) et si $\forall x \in X$ le polynôme $Y^m + s_1(x) Y^{m-1} + \dots + s_m(x) = 0$ admet m racines distinctes, alors F est à détermination finie.

Théorème de Puiseux: Toute fonction analytique multiforme à détermination finie faible sur le disque épointé $D^* = \{ z \in \mathbb{C} / 0 < |z| < 1 \}$ est de la forme:

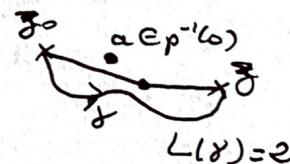
$$F(z) = \sum_{i \in \mathbb{I}} z^{\sigma_i} p_i(\ln z) \quad (\mathbb{I} \text{ fini}; \sigma_i \in \mathbb{C}; p_i \in \mathcal{O}(D^*)[Y])$$

II Classe de Nilsson (p38)

$X = \mathbb{C}^n \setminus p^{-1}(0)$ où $p \in \mathbb{C}[X_1, \dots, X_n]$, $p \neq 0$

* Définitions: Si γ est un chemin polygonal à $N+1$ sommets, le rang de γ est $L(\gamma) = N$. Si γ est un chemin de $\mathbb{C}^n \setminus p^{-1}(0)$, le rang de γ (noté $L(\gamma)$) est le minimum des rangs des chemins polygonaux homotopes à γ dans $\mathbb{C}^n \setminus p^{-1}(0)$. Ainsi $L(\gamma \circ \mu) \leq L(\gamma) + L(\mu)$.

• $F \in H^0(X)$ est à croissance tempérée si on a: $\exists n, m \in \mathbb{N}^* \forall z_0 \in X \forall f_0 \in S_F(z_0) \exists (c_n)_{n \in \mathbb{N}}$ suite réelle telle que $\forall \gamma \in \mathcal{C}(z_0, \bar{z}) \quad |(f_0)_\gamma(\bar{z})| \leq C_{L(\gamma)} \frac{(1+|\bar{z}|)^m}{|p(\bar{z})|^n}$



NB: On peut supposer $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$ croissante.

Il suffit de vérifier la propriété en un seul point z_0 et pour un seul germe $f_0 \in S_F(z_0)$.

exemple: $\frac{1}{p(z)}$ où p est un polynôme; $\sqrt{z}$ dans $\mathbb{C}^*$.

Proposition : $F \in \mathcal{H}(\mathbb{C}^n \setminus p^{-1}(0))$ à détermination finie est à croissance tempérée s'il existe $(m, w) \in \mathbb{N}^2$ et $C > 0$ / $\forall z \in X \quad |F(z)| \leq C \frac{(1+|z|)^m}{|p(z)|^w}$

(preuve : Tout point $z_0 \in X$ peut être joint à $z \in X$ par un chemin polygonal γ dans X de rang $L(\gamma) \leq 3 \deg p + 1$. On utilise la bijection de $S_F(z_0)$ vers $S_F(z) = \{\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_d, z\}$ qui à β_0 associe $(\beta_0)_\gamma \cdot (p_40)$.)

Application : Si $F \in \mathcal{O}(\mathbb{C}^n \setminus p^{-1}(0))$ est à croissance tempérée il existe $w \in \mathbb{N}$ et un polynôme g / $F = \frac{g}{p^w}$ = fraction rationnelle.

(preuve : $g = p^w F$ est analytique sur X et $|g(z)| \leq C(1+|z|)^m$. g est localement bornée sur $\mathbb{C}^n$ et le th. d'extension de Riemann montre que g se prolonge en une fct entière de $\mathbb{C}^n$ qui est un polynôme de degré $\leq m$ d'après le th. de Liouville.)

* Définitions :

$\mathcal{N}(\mathbb{C}^n \setminus p^{-1}(0)) = \{F \in \mathcal{H}(\mathbb{C}^n \setminus p^{-1}(0)) / F \text{ à det. finie faible et à croissance temp.}\}$

$\mathcal{A}(\mathbb{C}^n \setminus p^{-1}(0)) = \{F \in \mathcal{H}(\mathbb{C}^n \setminus p^{-1}(0)) / F \text{ à det. finie et à croissance tempérée}\}$

$\bigcup_p \mathcal{N}(\mathbb{C}^n \setminus p^{-1}(0)) = \mathcal{N}(\mathbb{C}^n)$ est la classe de Nilsson, et $\bigcup_p \mathcal{A}(\mathbb{C}^n \setminus p^{-1}(0))$ est la classe des fonctions algébriques sur $\mathbb{C}^n$.

III Fonctions algébriques (p43)

Proposition : $F \in \mathcal{H}(\mathbb{C}^n \setminus p^{-1}(0))$ est une fct algébrique ssi il existe m fonctions rationnelles $\Delta_j = \frac{A_j}{p^{v_j}}$ telles que $F^m + \Delta_1 F^{m-1} + \dots + \Delta_m = 0$ (quite à changer le polynôme p et prendre p^{v_j} un multiple de p en dehors duquel F est défini)

NB : F apparaît donc comme un élément algébrique sur $\mathbb{C}(x)$. Dans le but d'étudier les zéros d'une fonction algébrique, on établit les propositions :

Proposition (2.11 p45) : Il existe une bijection entre l'ensemble des fonctions algébriques sur $\mathbb{C}$ et l'ensemble des polynômes irréductibles de $\mathbb{C}[Y, x]$.

preuve : 1) Si $F \in \mathcal{A}(\mathbb{C}^n \setminus p^{-1}(0))$, $S_F(x) = \{\beta_1, x, \dots, \beta_m, x\}$

$$\prod_{i=1}^m (Y - \beta_{i,x}(x)) = Y^m + \Delta_1(x) Y^{m-1} + \dots + \Delta_m(x)$$

$\Delta_j(x) = \frac{A_j}{p^{v_j}}$ d'après l'application ci-dessus. On peut supposer les fractions $\Delta_j(x)$ irréductibles p^{v_j} et $H(Y, x) = p^w(x) Y^m + \tilde{A}_1(x) Y^{m-1} + \dots + \tilde{A}_m(x)$ où $w = \sup v_j$ vérifie $p^w F^m + \dots + \tilde{A}_m = 0$. H s'appelle le polynôme associé à F

$H(Y, x)$ est irréductible : comme $H(Y, x)$ est primitif dans $\mathbb{C}(x)[Y]$,

$H(Y, x)$ irréductible dans $\mathbb{C}[x][Y] \Leftrightarrow H(Y, x)$ irréductible dans $\mathbb{C}(x)[Y]$

On l'absurde : si $H = H_1 \cdot H_2$ où $H_i \in \mathbb{C}(x)[Y]$ et $\deg H_i < m$, il existe un polynôme $q(x)$ / (a) H_1 et H_2 sans racine commune si $x \in \mathbb{C} \setminus p^{-1}(0)$

(b) Tous les zéros de $H_1(Y, x)$ sont simples si $x \in \mathbb{C} \setminus p^{-1}(0)$

Les zéros de H_1 sont alors les branches locales d'une fct ana. mult. (cf. 1.29 p34) ce qui est absurde.

2) Réciproque: si $H(Y, x)$ est irréductible dans $\mathbb{C}[Y, x]$,

$$H(Y, x) = 0 \iff Y^m + \frac{q_{m-1}(x)}{q_m} Y^{m-1} + \dots + \frac{q_0}{q_m}(x) = 0 \quad \forall x \in \mathbb{C} \setminus q_m^{-1}(0)$$

$\Delta(x) = \frac{B(x)}{q_m^{w(x)}}$ = discriminant de $H(Y, x)$ n'est pas identiquement nul, on

pose $p = B q_m$. Sur $\mathbb{C} \setminus p^{-1}(0)$ $H(Y, x)$ possède toujours ses m racines distinctes et il existe une fonction multiforme F telle que $H(F, x) = 0$ (cf. 1.29 p 31)

La proposition précédente montre que F est algébrique. Comme H irréductible, c'est le polynôme associé à F (à $\lambda \in \mathbb{C}$ près).

Définition: $A \in \mathcal{A}(\mathbb{C})$ de polynôme irred. associé $H(Y, x) = q_m(x)Y^m + \dots + q_0(x)$

On pose $\beta(A) = m$ et $\delta(A) = \sup_{0 \leq i \leq m} \deg q_i$. $d(A) = \beta(A) + \delta(A)$ s'appelle le degré total de la fct algébrique A .

lemme (2.13 p 47): $\mathcal{A}(\mathbb{C})$ est un anneau et $\forall A, B \in \mathcal{A}(\mathbb{C})$

$$\beta(A+B) \leq \beta(A) \cdot \beta(B)$$

$$\delta(A+B) \leq \beta(A) \cdot \delta(B) + \beta(B) \cdot \delta(A)$$

On a la même chose pour $A \cdot B$

Proposition (2.14 p 50) Racines réelles de $A \in \mathcal{A}(\mathbb{C})$

Soit $A \in \mathcal{A}(\mathbb{C} \setminus p^{-1}(0))$ telle que $[0, 1] \cap p^{-1}(0) = \emptyset$ et si $\alpha(t)$ est une branche locale de A définie au voisinage de $[0, 1]$, de 2 choses l'une:

$$(1) \quad \exists m \alpha(t) \equiv 0 \text{ sur } [0, 1]$$

$$\text{ou } (2) \quad \# \{t \in [0, 1] / \exists m \alpha(t) = 0\} \leq 2 \beta(A) \cdot \delta(A)$$

IV Chemins algébriques réguliers de $\mathbb{C}^n$ (p 52)

Définition: $\gamma: [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}^n$ est un chemin algébrique régulier de $\mathbb{C}^n$ si

$\gamma(t) = (\alpha_1(t), \dots, \alpha_n(t))$ où α_i est la branche locale d'une fonction algébrique A_i de $\mathbb{C}$. Le rang total de γ est l'entier $d(\gamma) = \sup_{1 \leq i \leq n} d(A_i)$

ex: un chemin polynomial $\gamma(t) = (p_1(t), \dots, p_n(t))$ est un chemin alg. régulier de rang total $d(\gamma) = \sup \deg p_i + 1$

Théorème (2.19 p 57): Soient $p \in \mathbb{C}[X_1, \dots, X_n]$ et $w \in \mathbb{N}^*$

$\exists \chi(w) \in \mathbb{N} / \forall \gamma$ chemin de $\mathbb{C}^n \setminus p^{-1}(0)$ homotope à un chemin alg. régulier de rang total $\leq w$, on a: $L(\gamma) \leq \chi(w)$

Ce théorème permet d'obtenir de nombreuses propriétés des fonctions de classe de Nilsson.

1

Revêtements

1. Généralités sur les homéomorphismes locaux : (voir Godbillon Topoalg. p 105 généralités)

On désignera toujours par X et Y deux espaces topologiques. Une application continue $p: Y \rightarrow X$ définit une fibration au dessus de X .

On dit que p est COD si elle est continue, ouverte et discrète (ie si $\forall x \in X$ $p^{-1}(x)$ discret). On dit que $y \in Y$ est un point de ramification de p s'il n'existe pas de voisinage V de y tel que $p|_V$ soit injective.

1.1 Proposition : Les 2 assertions suivantes sont $\sim$:

(1) $p: Y \rightarrow X$ est une application continue, ouverte et discrète qui ne possède pas de point de ramification.

(2) $p: Y \rightarrow X$ est un homéomorphisme local.

preuve :

(1) $\Rightarrow$ (2) Il existe un ouvert $V \subset Y$ tel que $p|_V: V \rightarrow U = p(V)$ soit injective. U est ouvert car p est ouverte. Comme p est continue et ouverte, $p|_V: V \rightarrow U$ sera un homéomorphisme.

(2) $\Rightarrow$ (1) Inversement, si p est un homéomorphisme local, p est continue et ouverte. Si $y \in p^{-1}(x)$, il existe un voisinage V de y dans Y tel que $p|_V: V \rightarrow U \subset X$ soit un homéomorphisme. Comme $\{x\} \cap U = \{x\}$, on aura : $V \cap p^{-1}(x) = \{y\}$. CQFD

1.2 Proposition : Une application holomorphe entre 2 surfaces de Riemann, non constante, est une application COD.

preuve : $p: Y \rightarrow X$ est continue, donc ouverte d'après For 2.4 p 9 (on se ramène à $z \mapsto z^k$). Si $p^{-1}(x)$ n'était pas discret, p devrait être constante au voisinage d'un point de Y d'après le théorème d'identité (cf. For 1.11 p 7), ce qui entraînerait que p est constante sur toute la surface de Riemann Y . CQFD

NB: On peut ne pas obtenir un homéomorphisme local, même dans le cadre de la pro. 1.2, puisque si $k \geq 2$, $k \in \mathbb{N}$, et $p: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, 0 est l'unique pt de ramification

$$z \mapsto z^k$$

de p .

1.3 Proposition : Soient X une surface de Riemann, Y un a.e. séparé et $p: Y \rightarrow X$ un homéomorphisme local.

On peut alors munir Y d'une structure complexe pour laquelle p est holomorphe (et $\tilde{m}$ biholomorphe d'après For 2.5)

preuve : (cf For 4.6)

2. Relèvements d'applications

Soient X, Y, Z trois e.t., $p: Y \rightarrow X$ une fibration au dessus de X et $f: Z \rightarrow X$ une application continue.

Une relevée de f dans Y est une application $g: Z \rightarrow Y$ qui est continue qui rend le diagramme

$$\begin{array}{ccc} & & Y \\ & \nearrow g & \downarrow p \\ Z & \xrightarrow{f} & X \end{array} \quad \text{commutatif.}$$

2.1 Proposition: Soient X, Y, Z trois surfaces de Riemann, $p: Y \rightarrow X$ un homéomorphisme local et $f: Z \rightarrow X$ une application holomorphe. Tout relèvement de f dans Y est holomorphe.

preuve: Soient $c \in Z$, $b = g(c)$ et $a = p(b) = f(c)$. Il existe un voisinage ouvert V de b et U de a tels que $p|_V: V \rightarrow U$ soit biholomorphe

(cf. For 2.5). Notons $\varphi: U \rightarrow V$ l'inverse de $p|_V$.

Comme g est continue, il existe un vois. ouv. W de c tel que $g(W) \subset V$.

Comme $f = p \circ g$, $g|_W = \varphi \circ f|_W \Rightarrow g$ holomorphe en c .

□

Les 2 théorèmes fondamentaux concernant les relèvements d'applications sont les suivants:

2.2 Théorème (Unicité du relèvement)

Soient X et Y deux e.t. séparés, $p: Y \rightarrow X$ un revêtement homéomorphisme local et $f: Z \rightarrow X$ une application continue définie sur un e.t. connexe.

Si g_1 et g_2 sont 2 relèvements de f qui coïncident en $z_0 \in Z$, alors $g_1 = g_2$.

preuve: $T = \{z \in Z \mid g_1(z) = g_2(z)\}$ est fermé comme image réciproque de la diagonale $\Delta \subset Y \times Y$ par l'application continue $(g_1, g_2): Z \rightarrow Y \times Y$, et $T \neq \emptyset$ car $z_0 \in T$. Z étant connexe, il suffit de montrer que T est ouvert pour conclure à $T = Z$.

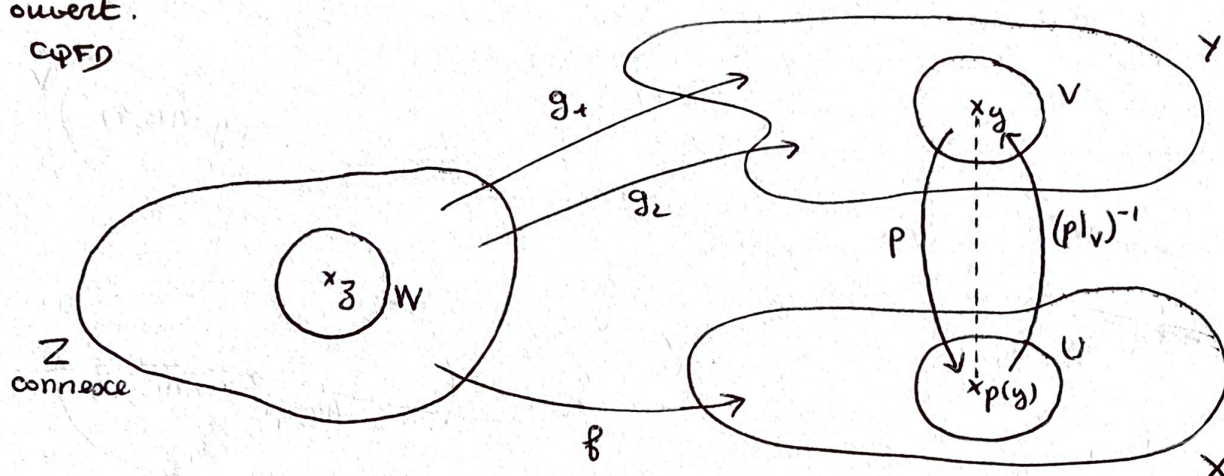
Soit $z \in T$ et $y = g_1(z) = g_2(z)$:

$\exists V$ vois. ouv. de y / $p|_V: V \rightarrow U$ homéomorphisme

Comme g_1 et g_2 sont continues, $\exists W$ vois. ouv. de $z \in Z$ / $g_i(W) \subset V$ ($i=1,2$)

Alors $p \circ g_i = f \Rightarrow g_i|_W = (p|_V)^{-1} \circ (f|_W)$ et donc $g_1|_W = g_2|_W \Rightarrow T$ est ouvert.

CQFD



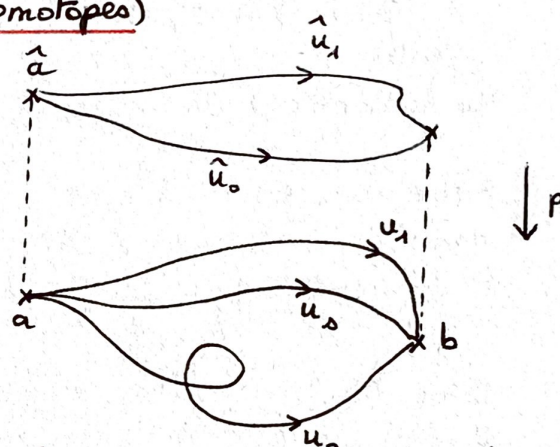
2.3 Théorème (Relèvement de 2 chemins homotopes)

X, Y = e.t. séparés

$p: Y \rightarrow X$ homéomorphisme local

u_0 et u_1 sont 2 chemins de X d'origine a et d'extrémité b , homotopes dans X . On notera $A(s, t) = u_s(t)$ $(s, t) \in [0, 1]^2$ la déformation continue qui fait passer de u_0 à u_1 .

$\hat{a} \in Y$ donné tel que $p(\hat{a}) = a$



On suppose que : "Tous les chemins $u_s(t)$ se relèvent en un chemin $\hat{u}_s(t)$ de Y d'origine $\hat{a}$ "

Alors : $\hat{u}_0$ et $\hat{u}_1$ ont la même extrémité, et sont homotopes dans Y .

preuve :

Soons $I = [0, 1]$ et $\hat{A}(s, t) \doteq \hat{u}_s(t)$ où $(s, t) \in I^2$ et où $\hat{u}_s$ est le chemin relevé de u_s d'origine $\hat{a}$.

1^{er} stade : $\exists E_0 > 0$ / $\hat{A} : I \times [0, E_0] \rightarrow Y$ continue

$\exists V$ voisinage de $\hat{a}$ $\exists U$ voisinage de a / $p|_V : V \rightarrow U$ soit un homéomorphisme.

Notons $\varphi = (p|_V)^{-1}$. Comme $A(I \times \{0\}) = \{a\}$ et A continue, on a :

$$\exists E_0 > 0 \quad A(I \times [0, E_0]) \subset U$$

(En effet, $\forall s \in I \exists E_{s,1} \mid (s, 0) < E_{s,1}$ et $0 < t < E_{s,1} \Rightarrow A(s, t) \in U$, on utilise la compacité de I et l'on prend $E_0 = \inf E_{s,1}$.)

L'unicité du relèvement des chemins dans U montre que $\hat{u}_s|_{[0, E_0]} = \varphi \circ u_s|_{[0, E_0]}$

$\forall s \in I$, donc :

$$\hat{A} = \varphi \circ A \text{ sur } I \times [0, E_0] \Rightarrow \hat{A} \text{ continue sur } I \times [0, E_0].$$

2^e stade : $\hat{A} : I \times I \rightarrow Y$ est continue

Par l'absurde : sinon $\exists (\sigma, t_0) \in I \times I$ / $\hat{A}$ non continue en (σ, t_0) .

Soit : $\tau \doteq \inf \{ t / \hat{A} \text{ non continue en } (\sigma, t) \}$

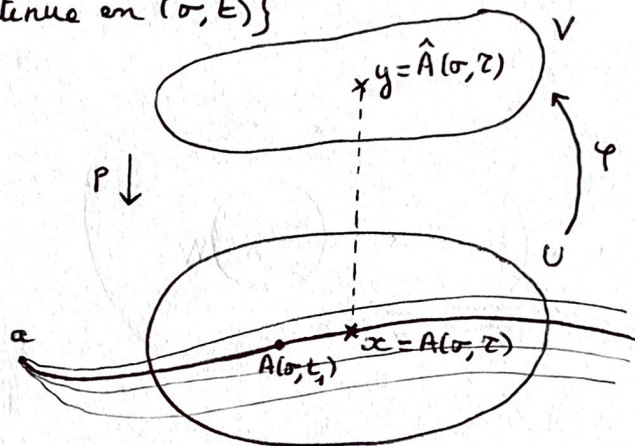
D'après le 1^{er} stade : $\varepsilon_0 \leq \tau$.

Posons $x = A(\sigma, \tau)$ et $y = \hat{A}(\sigma, \tau)$

$\exists$ voisinage de y $\exists$ voisinage de x /

$p|_V : V \rightarrow U$ homéomorphisme

On note $\varphi = (p|_V)^{-1}$



A est continue, donc :

$\exists \varepsilon > 0$ / $A(I_\varepsilon(\sigma) \times I_\varepsilon(\tau)) \subset U$ où $I_\varepsilon(\xi) = \{ t \in I / |t - \xi| < \varepsilon \}$

en particulier, $u_\sigma(I_\varepsilon(\tau)) \subset U \Rightarrow \hat{u}_\sigma|_{I_\varepsilon(\tau)} = \varphi \circ u_\sigma|_{I_\varepsilon(\tau)}$ d'après l'unicité du relèvement des chemins.

Soit $t_1 \in I_\varepsilon(\tau)$ tel que $t_1 < \tau$. $\hat{A}(\sigma, t_1) = \hat{u}_\sigma(t_1) \in V$ et $\hat{A}$ est continue en (σ, t_1)

donc : $\exists 0 < \delta \leq \varepsilon$ / $\hat{A}(\delta, t_1) = \hat{u}_\delta(t_1) \in V \quad \forall \delta \in I_\delta(\sigma)$

L'unicité du relèvement des chemins donne alors :

$$\hat{u}_\delta|_{I_\varepsilon(\tau)} = \varphi \circ u_\delta|_{I_\varepsilon(\tau)} \quad \forall \delta \in I_\delta(\sigma)$$

Donc $\hat{A} = \varphi \circ A$ sur $I_\delta(\sigma) \times I_\varepsilon(\tau)$, et $\hat{A}$ est continue sur un voisinage de $I_\delta(\sigma) \times I_\varepsilon(\tau)$ du point (σ, τ) , ce qui est absurde au regard à la définition de τ . Donc $\hat{A} : I \times I \rightarrow Y$ est continue.

3^e stade : $\hat{u}_0$ et $\hat{u}_1$ ont même extrémité.

On a $A = p \circ \hat{A}$ et $A(I \times \{1\}) = b$ donc $\hat{A}(I \times \{1\}) \subset p^{-1}(b)$.

Comme p est un revêtement homéomorphisme local, $p^{-1}(b)$ est discret et $I \times \{1\}$ est connexe, donc $\hat{A}(I \times \{1\})$ est réduit à 1 point.

Les chemins $\hat{u}_0$ et $\hat{u}_1$ ont même extrémité et sont homotopes dans Y grâce à la déformation continue $\hat{A}(\delta, t)$

CQFD

Il serait bon de savoir quels sont les homéomorphismes locaux tels que tout chemin admette une relevée. Le résultat est atteint en 4.1, mais il faut d'abord introduire les :

3. Revêtements

Un revêtement est une fibration $p: Y \rightarrow X$ localement triviale dont chaque fibre $p^{-1}(x)$ est discrète (d'après le livre de topologie de Fuchs, ed. Moscou).

3.1 Définition

Un revêtement est une application $p: Y \rightarrow X$ continue entre 2 e.t. qui vérifie l'une des 2 conditions suivantes :

(1) $\forall x \in X \exists U$ voisinage de x dans X $p^{-1}(U) = \bigcup_{j \in J} V_j$ où les V_j sont des ouverts de E disjoints 2 à 2 et tels que $p|_{V_j}: V_j \rightarrow U$ soit un homéomorphisme.

(2) (Propriété de trivialité locale)

$\forall x \in X \exists U$ voisinage de x dans X

$\exists F$ espace discret

$\exists \Phi$ homéomorphisme : $p^{-1}(U) \rightarrow U \times F$

tels que le diagramme suivant soit commutatif :

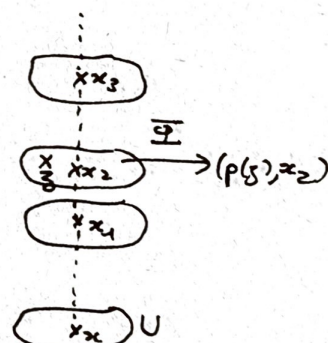
$$\begin{array}{ccc} p^{-1}(U) & \xrightarrow{\Phi} & U \times F \\ p \downarrow & \swarrow \pi_1 & \\ U & & \end{array}$$

On dit que $p: Y \rightarrow X$ est un revêtement de X , que X est la base du revêtement, Y l'espace total, p la "projection" et $p^{-1}(x)$ la fibre au dessus de $x \in X$. Forster prend la définition (1), tandis que Godbillon ajoute "p surjective" (ajouter "p est surjective" dans (1) et " $F \neq \emptyset$ " dans (2))

preuve de (1) $\Leftrightarrow$ (2) :

(1) $\Rightarrow$ (2) On a le diagramme

$$\begin{array}{ccc} p^{-1}(U) & \xrightarrow{\Phi} & U \times F \\ \exists \in V_j & \mapsto & (p(z), x_j) \\ p \downarrow & \swarrow \pi_1 & \\ U & & \end{array}$$



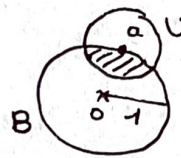
où $F = p^{-1}(x) = \{x_j / j \in J\}$ ($x_j \in V_j$) est muni de la topologie discrète

(2) $\Rightarrow$ (1) Notons $F = \{x_j / j \in J\}$ l'e.t. discret du (2). Il suffit de constater que $p^{-1}(U) = \bigcup_{j \in J} \Phi^{-1}(U \times \{x_j\})$ où

$$\begin{array}{ccc} p^{-1}(U) & \xrightarrow{\Phi} & U \times F \\ p \downarrow & \swarrow \pi_1 & \\ U & & \end{array}$$

CQFD

Remarque : Il est clair qu'un revêtement est un homéomorphisme local, la réciproque étant fautive.



3.2 Exemples :

1) Soit $B = \{z \in \mathbb{C} / |z| < 1\}$ et $i: B \rightarrow \mathbb{C}$ l'injection canonique. i est un homéomorphisme local, mais n'est pas un revêtement car si $|a| = 1$, il n'existe pas d'ouvert U contenant a vérifiant la définition 3.1.

2) Soit $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 2$ et $p: \mathbb{C}^* \rightarrow \mathbb{C}^*$

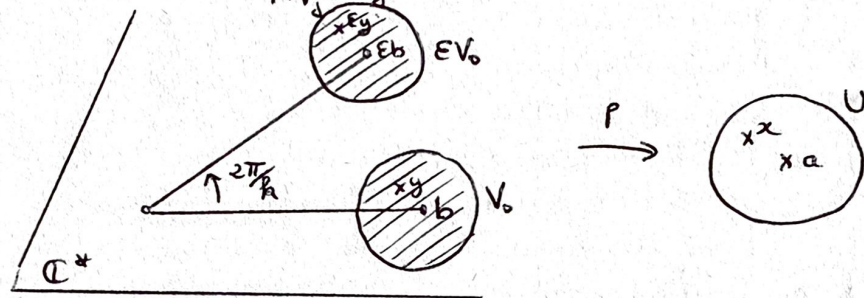
$$z \mapsto z^k$$

$$\forall a \in \mathbb{C}^* \exists b \in \mathbb{C}^* p(b) = a$$

p est un homéomorphisme local. Montrons que p est un revêtement :

$\exists V_0$ voisinage ouvert de b $\exists U$ voisinage ouvert de a / $p|_{V_0}: V_0 \rightarrow U$ homéomorphisme.

Puisque $p^{-1}(U) = V_0 \cup \varepsilon V_0 \cup \dots \cup \varepsilon^{k-1} V_0$ où ε est une racine primitive k -ième de l'unité ($\varepsilon = e^{i\frac{2\pi}{k}}$, par ex.). Si V_0 est assez petit, les ensembles $V_j = \varepsilon^j V_0$ sont disjoints 2 à 2 et $p|_{V_j}: V_j \rightarrow U$ est un homéomorphisme.



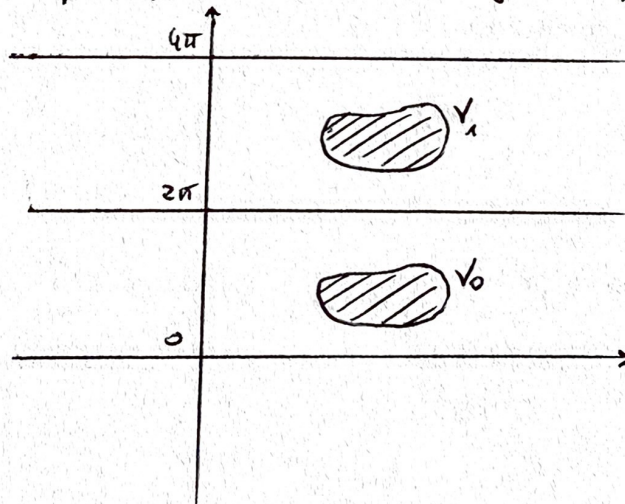
3) $\exp: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}^*$ est un revêtement :

Soit $a \in \mathbb{C}^*$ donné et $b \in \mathbb{C} / e^b = a$. On sait déjà que $\exp$ est un homéomorphisme local : $\exists V_0$ vois de b $\exists U$ vois de a $\exp|_{V_0}: V_0 \rightarrow U$ homéomorphisme

Donc :

$$\exp^{-1}(U) = \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} V_n \quad \text{où } V_n = V_0 + i2\pi n$$

Si V_0 est suffisamment petit, les V_n sont 2 à 2 disjoints (par ex: $\text{diam } V_0 < 2\pi$)



4) Si $\Gamma \subset \mathbb{C}$ est un groupe, la surjection canonique $\pi: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}/\Gamma$ est un revêtement sur $\mathbb{C}/\Gamma$

(Le lecteur seulement intéressé par le problème de relèvement de chemins et les revêtements universels peut passer directement aux § 4 et 5.)

3.3 Proposition : (Tous les e.t. sont séparés)

- (1) Tout revêtement est un homéomorphisme local.
- (2) Soit $p: Y \rightarrow X$ un revêtement sur l'espace connexe X , alors toutes les fibres $p^{-1}(x)$ ont le même cardinal quand x décrit X .
- (3) Un homéomorphisme local $p: Y \rightarrow X$ dont toutes les fibres $p^{-1}(x)$ sont finies et ont même cardinal est un revêtement.
- (4) Soient $X =$ variété différentielle connexe.
 $Y =$ " " compacte.
 $\dim X = \dim Y$

Toute submersion $p: Y \rightarrow X$ est un revêtement.

- (5) Soient $p: Y \rightarrow X$ un revêtement de X connexe et localement connexe, et C une composante connexe de Y . Alors $p|_C: C \rightarrow X$ est un revêtement de X .

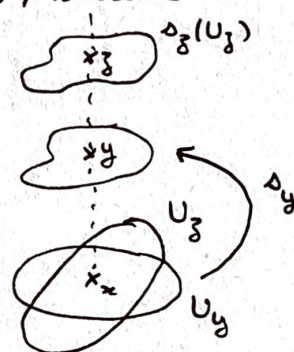
preuve:

- (1) cf définition.
- (2) $\{x \in X \mid \# p^{-1}(x) = \# p^{-1}(x_0)\}$ est non vide, ouvert et fermé dans X connexe.
- (3) $\forall x \in X \quad \forall y \in p^{-1}(x) \quad \exists U_y$ vois. ouvert de $x \quad \exists s_y: U_y \rightarrow Y$ section au dessus de U_y (ie appl. continue / $p \circ s = \text{id}_X$)
 $\# p^{-1}(x) = n \in \mathbb{N}$, et Y séparé donc on peut supposer les $s_y(U_y)$ 2 à 2 disjoints.

On pose :

$$U = \bigcap_{y \in p^{-1}(x)} U_y = \text{vois. ouvert de } x, \text{ car } p^{-1}(x) \text{ fini.}$$

$$\sigma_y = s_y|_U : U \rightarrow Y \text{ continue}$$



de sorte que $p^{-1}(U) = \bigcup_{y \in p^{-1}(x)} \sigma_y(U)$ montre que p est un revêtement.

(Noter que $p^{-1}(U) \subset \bigcup_{y \in p^{-1}(x)} \sigma_y(U)$ car $\forall z \in U \quad \# p^{-1}(z) = \# p^{-1}(x)$)

(4) = Corollaire de (3) (Un autre énoncé figure dans le Berger - Gostiaux 4.1.5 p 140) par itale, c'est donc un difféomorphisme local, donc à fortiori un homéomorphisme local.

Si $x \in X$, $p^{-1}(x)$ est fermé, discret dans le compact Y , donc fini.

Il reste à vérifier que les ensembles $p^{-1}(x)$ ont tous le même nbre d'éléments pour appliquer le (3):

$$\forall x \in X \quad p^{-1}(x) = \{y_1, \dots, y_n\} \quad \text{et} \quad \exists U \text{ vois. ouv. de } x \quad \exists V_i \text{ vois. ouv. de } y_i /$$

$$V_i \cap V_j = \emptyset \text{ si } i \neq j \quad \text{et} \quad p|_{V_i}: V_i \rightarrow U \text{ homéomorphisme}$$

Ainsi: $\forall z \in U \quad \# p^{-1}(z) \geq n$.

Comme X est connexe, dire que le cardinal $\# p^{-1}(x)$ n'est pas constant revient à affirmer qu'il existe un pt $x \in X$ au voisinage duquel $\# p^{-1}(x)$ n'est pas

constant. Mais alas, il existe une suite $(u_q)_q$ de U qui converge vers x et une suite $(v_q)_q$ de $Y \setminus \bigcup V_i$ / $p(v_q) = u_q$.
 Y est compact, donc v possède une valeur d'adhérence v qui vérifie
 $p(v) = x$ et $v \notin \bigcup_i V_i$.
 ce qui est absurde.

(5) Soit $x \in X$, U voisinage connexe de x tel que $p^{-1}(U) = \bigcup_{i \in I} V_i$, et
 $p|_{V_i} : V_i \rightarrow U$ homéomorphismes.
 $\forall i \in I \quad V_i \cap C = \emptyset$ ou $V_i \subset C$, puisque $V_i = (p|_{V_i})^{-1}(U)$ est connexe.
 On a donc :

$$(p|_C)^{-1}(U) = \bigcup_{i \in I'} V_i \quad \text{où } I' = \{i \in I / V_i \cap C \neq \emptyset\}$$

L'hypothèse X est connexe est inutile pour la définition 3.1. Cependant, si l'on ajoute l'hypothèse " p surjective" dans 3.1, comme dans Godbillon, il s'avère indispensable de vérifier que $I' \neq \emptyset$ pour tout $x \in X$, ce qui se montre comme en (2) en vérifiant que les ensembles $p^{-1}(x) \cap C$, $x \in X$, ont tous le même cardinal.

CQFD

4. Relèvement de chemins

Une fibration $p: Y \rightarrow X$ possède la propriété de relèvement des chemins (PRC) si tout chemin u de X se relève en un chemin $\hat{u}$ de Y d'origine arbitraire $\hat{a} \in Y$ ($p(\hat{a}) = u(0)$).

4.1 Théorème fondamental: Tout revêtement $p: Y \rightarrow X$ possède la propriété (PRC).

(NB: Une réciproque est donnée en 4.5)

preuve: Soit $u: [0,1] \rightarrow X$ un chemin, $y_0 \in Y$ et $p(y_0) = u(0)$. La compacité de $[0,1]$ montre l'existence d'une suite $0 = t_0 < \dots < t_n = 1$ et d'ensembles ouverts $U_k \subset X$ ($1 \leq k \leq n$) tels que

$$(i) \quad u([t_{k-1}, t_k]) \subset U_k$$

$$(ii) \quad p^{-1}(U_k) = \bigcup_{j \in J_k} V_{kj} \quad \text{où } V_{kj} \text{ ouverts de } Y \text{ et } p|_{V_{kj}}: V_{kj} \rightarrow U_k \text{ homéomorphisme.}$$

On montre l'existence d'un relèvement $\hat{u}|_{[0, t_k]}: [0, t_k] \rightarrow Y$ tel que $\hat{u}(0) = y_0$ par récurrence sur k .

Le début de la récurrence on $k=0$ est trivial. Soit $\hat{u}|_{[0, t_{k-1}]}: [0, t_{k-1}] \rightarrow Y$ et $\hat{u}(t_{k-1}) = y_{k-1}$. $p(y_{k-1}) = u(t_{k-1}) \in U_k$ donc il existe $j \in J_k$ tel que $y_{k-1} \in V_{kj}$.

Notons $\gamma: U_k \rightarrow V_{kj}$ l'application réciproque de l'homéomorphisme $p|_{V_{kj}}: V_{kj} \rightarrow U_k$, et définissons $\hat{u}|_{[t_{k-1}, t_k]} = \gamma \circ (u|_{[t_{k-1}, t_k]})$.

On vérifie que l'on prolonge ainsi $\hat{u}$ continuellement sur $[0, t_k]$.

CQFD

4.2 Remarque:

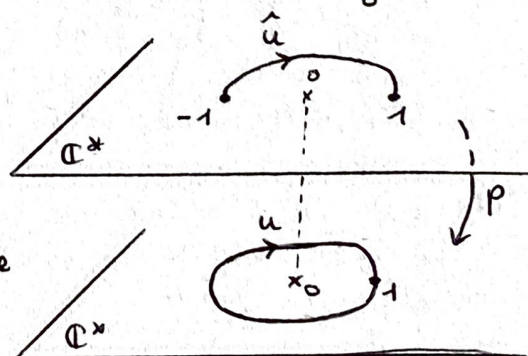
Si $p: Y \rightarrow X$ est un revêtement et si $u: [0,1] \rightarrow X$ est un chemin, u se relève de manière unique en un chemin $\hat{u}: [0,1] \rightarrow Y$ d'origine arbitraire $\hat{u}(0) = y_0$ où $p(y_0) = u(0)$, d'après 4.1 et 2.2.

Mais si u est un lacet, la relevée $\hat{u}$ n'est pas nécessairement fermée: on a le contre-exemple:

$$X = Y = \mathbb{C}^* \quad p: \mathbb{C}^* \rightarrow \mathbb{C}^* \quad y_0 = 1 \text{ et } u(t) = e^{i2\pi t} = \text{cercle d'origine } 1. \\ \delta \mapsto \delta^2$$

Alors $\hat{u}(t) = e^{i\pi t}$ définit bien une relevée de u par p , qui n'est pas fermée: ses extrémités sont ± 1 .

Néanmoins, le théorème 2.3 affirme que la relevée d'un lacet homotope à un point dans X est encore un lacet homotope à un point.



4.3 Corollaire:

Soient X et Y 2 e.t. séparés, X connexe par arcs et $p: Y \rightarrow X$ un revêtement. Alors toutes les fibres $p^{-1}(x)$ ont même cardinal lorsque x parcourt X .

(Si $p^{-1}(x)$ est de cardinal fini, on dit que p est un revêtement à π $p^{-1}(x)$ feuilletés)

preuve: Soit $\gamma: p^{-1}(x_0) \rightarrow p^{-1}(x_1)$

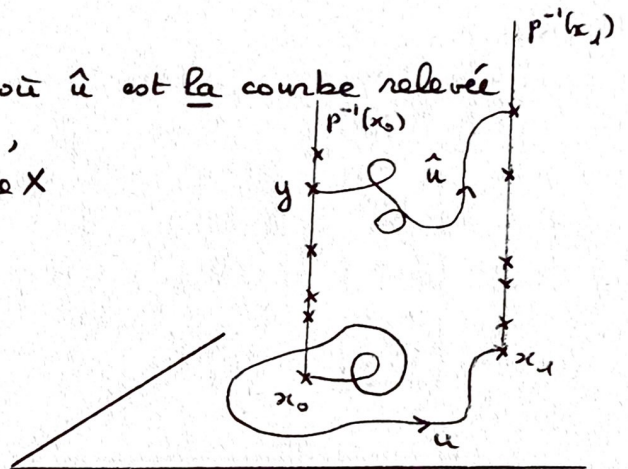
$y \mapsto \hat{u}(1)$ où $\hat{u}$ est la courbe relevée

de $u: [0,1] \rightarrow X$ d'origine $\hat{u}(0) = y$,

$u: [0,1] \rightarrow X$ étant un chemin fixé de X d'origine x_0 et d'extrémité x_1 .

γ est bijective d'après l'unicité de la relevée.

CQFD



4.4 lemme: Soient X et Y 2 e.t. séparés, $p: Y \rightarrow X$ un homéomorphisme local qui possède la propriété (PRC)*, Z un e.t. simplement connexe, connexe par arcs et localement connexe par arcs, et $f: Z \rightarrow X$ continue. Si $z_0 \in Z$ et $y_0 \in Y$ vérifient $f(z_0) = p(y_0)$, il existe une application relevée $\hat{f}: Z \rightarrow Y$ de f telle que $\hat{f}(z_0) = y_0$.

preuve:

* Construction de $\hat{f}: Z \rightarrow Y$

Soit $z \in Z$ et u un chemin

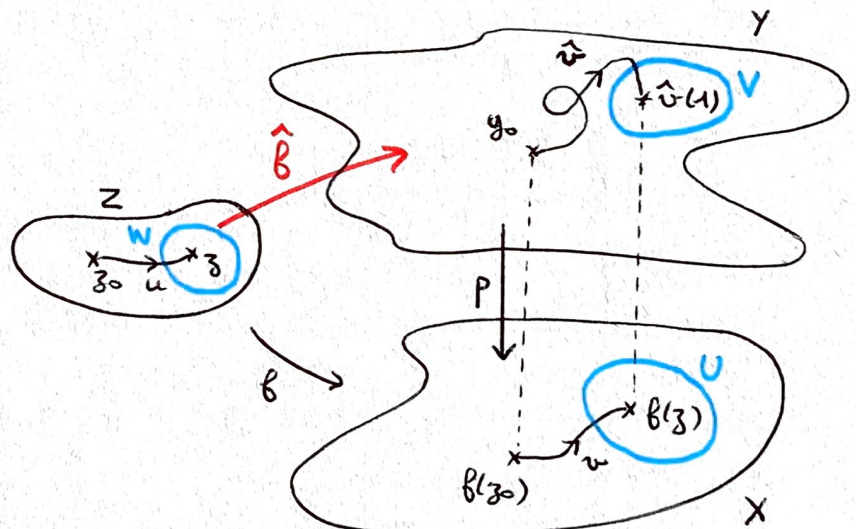
liant z_0 à z (on notera

$u \in \mathcal{C}(z_0, z)$).

$v(t) \doteq f(u(t))$ est un chemin de X liant $f(z_0)$ à $f(z)$, qui se relève en $\hat{v}(t)$ d'origine y_0 .

On pose:

$$\hat{f}(z) \doteq \hat{v}(1)$$



La définition ne dépend pas du chemin u car si $u_1 \in \mathcal{C}(z_0, z)$, on pose $v_1 = f \circ u_1$. v_1 est homotope à $v = f \circ u$ car Z est simplement connexe, de sorte que le théorème 2.3 de relèvement de 2 chemins homotopes montre que $\hat{v}_1$ et $\hat{v}$ ont même extrémité $\hat{v}(1) = \hat{v}_1(1)$, et sont homotopes dans Y .

On a, par construction: $f = p \circ \hat{f}$.

(* donc en particulier, un revêtement (cf 4.1))

* $\hat{p}$ est continue :

Soit $z \in Z$, $y = \hat{p}(z)$ et $y \in V \subset Y$. Il existe un ouvert U contenant $p(z)$ tel que $p|_V: V \rightarrow U$ soit un homéomorphisme. On a $p(y) = p(z)$, et on pose $\varphi = (p|_V)^{-1}$.

p est continue, et Z est localement connexe par arcs, donc il existe un ouvert connexe par arc W contenant z et tel que $p(W) \subset U$.

On aura $\hat{p}(W) \subset V$. En effet, si $z' \in W$ et si $u' \in \mathcal{C}(z, z')$ est un chemin dans W (Z est localement connexe par arcs), soit $v'(t) = p(u'(t))$.

v' est un chemin de X contenu entièrement dans U , et le relevé

$\hat{v}'(t) = \varphi \circ v'(t)$ de v' d'origine y , est inclus dans V .

Alors $\hat{v}' \circ v'(t) = p(u'(t))$ se relève en $\hat{u}' : \hat{u}'$ d'origine y ,

d'où : $\hat{p}(z') = (\hat{u}' \circ \hat{v}')(1) = \hat{u}'(1) \in V \Rightarrow \hat{p}(W) \subset V$

CQFD

4.5 Théorème :

X = variété analytique complexe*

Y = e.t. séparé

Tout homéomorphisme local $p: Y \rightarrow X$ qui possède la propriété (PRC) est un revêtement.

preuve :

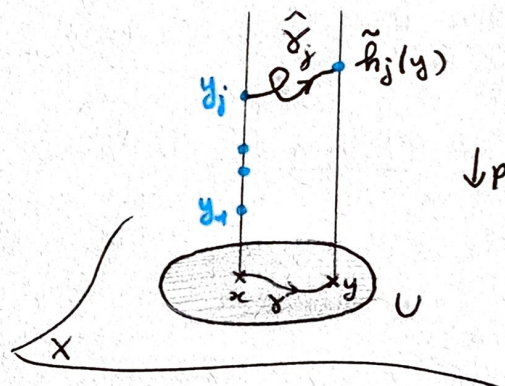
Soit $x \in X$. Prenons un voisinage U de x simplement connexe et connexe par arcs. Si $y \in U$, il existe un chemin $\gamma \in \mathcal{C}(x, y)$ dans U qui se relève en $\hat{\gamma}_j$ d'origine y_j , où on a posé $p^{-1}(x) = \{y_j / j \in J\}$

Prenons :

$\hat{h}_j(y) = \hat{\gamma}_j(1)$ (où $h: U \rightarrow U$ est l'identité de U)

$\hat{h}_j: U \rightarrow Y$ est bien définie car U est simplement connexe, continue (cf. lemme 4.4), et telle que $p \circ \hat{h}_j = h$

On vérifie alors que $p^{-1}(U) = \bigcup_{j \in J} \hat{h}_j(U)$



(* On peut prendre X = e.t. séparé loc. simplement connexe, et loc. connexe par arcs. Sous cette hypothèse, et si Y est un e.t. séparé, on aura donc :

$$\left\{ \begin{array}{l} p: Y \rightarrow X \text{ homéomorphisme local} \\ \text{possède la propriété (PRC)} \end{array} \right\} \Leftrightarrow p \text{ est un revêtement}$$

5. Revêtements universels.

5.1 Définition : Un revêtement $p: Y \rightarrow X$ (X, Y e.t. connexes) est dit universel s'il vérifie la propriété universelle :

* Pour tout revêtement connexe $q: Z \rightarrow X$ et pour tout points $y_0 \in Y, z_0 \in Z$ tels que $p(y_0) = q(z_0)$, il existe une et une seule application continue $\beta: Y \rightarrow Z$ telle que $\beta(y_0) = z_0$ et qui rende le diagramme :

$$\begin{array}{ccc} & Y & \\ \beta \swarrow & \downarrow p & \\ Z & \xrightarrow{q} & X \end{array} \quad \text{commutatif "}$$

5.2 Proposition : Le revêtement universel d'un e.t. connexe X est unique à homéomorphisme près.

preuve : Si $q: Z \rightarrow X$ est un autre revêtement universel de X , il existe $g: Z \rightarrow Y$ continue telle que $g(z_0) = y_0$. Mais alors $g \circ \beta: Y \rightarrow Y$ vérifie $g \circ \beta(y_0) = y_0$ donc (cf. unicité) $g \circ \beta = \text{id}_Y$. De même, d'après l'unicité de la propriété universelle $\beta \circ g = \text{id}_Z$, et $\beta: Y \rightarrow Z$ est un homéomorphisme.

CQFD

5.3 Théorème : Soient X et Y 2 variétés différentielles connexes. Si $p: Y \rightarrow X$ est un revêtement simplement connexe, alors p est le revêtement universel de X .

preuve : Soit $q: Z \rightarrow X$ un revêtement connexe de X et $q(z_0) = p(y_0)$. Le lemme 4.4 montre l'existence d'un relèvement $\hat{p}: Y \rightarrow Z$ de l'application p telle que $\hat{p}(y_0) = z_0$.

$$\begin{array}{ccc} & Y & \\ \hat{p} \swarrow & \downarrow p & \\ Z & \xrightarrow{q} & X \end{array}$$

5.4 Théorème : Toute variété connexe X possède un revêtement universel $p: \tilde{X} \rightarrow X$.

preuve :

D'après 5.3, il suffit de trouver une variété $\tilde{X}$ connexe et simplement connexe et un revêtement $p: \tilde{X} \rightarrow X$. (cf remarque 5.5)

Fixons $x_0 \in X$, et posons :

$\pi(x_0, x)$ = ensemble des classes d'homotopie des chemins d'origine x_0 et d'extrémité x .

$$\tilde{X} \doteq \{ (x, \alpha) / x \in X \text{ et } \alpha \in \pi(x_0, x) \}$$

$$p: \tilde{X} \rightarrow X$$

$$(x, \alpha) \mapsto x$$

Il faut munir $\tilde{X}$ d'une topologie telle que $\tilde{X}$ soit séparée, connexe, simplement connexe et que $p: \tilde{X} \rightarrow X$ soit un revêtement.

Si $(x, \alpha) \in \tilde{X}$ et $U \subset X$ désigne un voisinage ouvert connexe et simplement connexe de x , posons :

$$[U, \alpha] = \{ (y, \beta) \in \tilde{X} / y \in U, \beta = cl(v \circ \alpha) \text{ où } u \in \mathcal{C}(x_0, x) \text{ est fixé, } \alpha = cl(u) \text{ et } v \in \mathcal{C}(x, y) \text{ reste dans } U \}$$

Comme U est simplement connexe, β ne dépend pas du choix du chemin v . Notons $\mathcal{B}$ l'ensemble des $[U, \alpha] \subset \tilde{X}$.

1) $\mathcal{B}$ est la base d'une topologie de $\tilde{X}$ pour laquelle p est un homéomorphisme local (donc continu)

* $\tilde{X} = \bigcup_{[U, \alpha] \in \mathcal{B}} [U, \alpha]$ car $\forall (x, \alpha) \in \tilde{X}$ si U ouvr. simpl. connexe $\ni x$, $(x, \alpha) \in [U, \alpha] \in \mathcal{B}$.

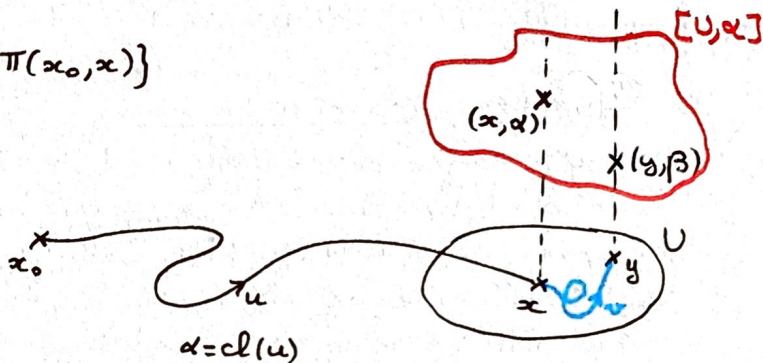
* Soit $(z, \gamma) \in [U, \alpha] \cap [V, \beta]$. Alors $z \in U \cap V$ et il existe un voisinage W ouvert connexe et simplement connexe de z inclus dans $U \cap V$.
Alors $(z, \gamma) \in [W, \gamma] \subset [U, \alpha] \cap [V, \beta]$

* $\forall [U, \alpha] \in \mathcal{B}$ $p|_{[U, \alpha]}: [U, \alpha] \rightarrow U$ est un homéomorphisme.

2) $\tilde{X}$ est séparé :

Il suffit de montrer que 2 points de la forme (x, α) et (x, β) où $\alpha \neq \beta$ possèdent des voisinages disjoints. Soit $U \subset X$ un vois. ouvert de x , connexe et simplement connexe. Alors $[U, \alpha] \cap [U, \beta] = \emptyset$

Sinon $(y, \gamma) \in [U, \alpha] \cap [U, \beta]$, et en notant $w \in \mathcal{C}(x, y)$ courbe de U $\neq$
 $\alpha = cl(u)$ et $\beta = cl(v)$, on a : $\gamma = cl(w \circ u) = cl(w \circ v) \Rightarrow cl(u) = cl(v)$
ce qui est absurde.



3) p est un revêtement et $\tilde{X}$ est connexe :

Soient $u \in \mathcal{C}(x_0, x)$, $u: [0, 1] \rightarrow X$ et $v \in \mathcal{C}(x_0)$

Posons $u_s: [0, 1] \rightarrow X$

$$t \mapsto u(st)$$

L'application $\hat{u}: [0, 1] \rightarrow \tilde{X}$

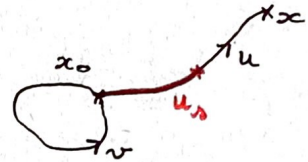
est continue, et c'est

$$t \mapsto (u(t), cl(u_t \circ v))$$

manifestement une relevée du chemin u d'origine $\hat{u}(0) = (x_0, cl(v))$

et d'extrémité $\hat{u}(1) = (x, cl(u \circ v))$

$\tilde{X}$ est donc connexe et l'homéomorphisme local $p: \tilde{X} \rightarrow X$ possède la propriété (PRC). D'après le théorème 4.5, p est un revêtement.



4) $\tilde{X}$ est simplement connexe.

Il suffit de montrer que tout lacet $w: [0, 1] \rightarrow \tilde{X}$ d'origine (x_0, E) , où E est la classe d'homotopie du chemin constant x_0 dans $\tilde{X}$, est homotope à un point*.

$u \doteq p \circ w$ est un lacet de X d'origine $u(0) = x_0$.

On a construit la relevée $\hat{u}$ de u au 3), à savoir $\hat{u}(t) = (u(t), cl(u_t))$ car v est ici réduit à un point. L'unicité de la relevée ayant la condition initiale (x_0, E) montre que $\hat{u} = w$, donc que $\hat{u}(1) = (x_0, cl(u)) = (x_0, E)$ ce qui implique que u est homotope au point x_0 .

Le théorème 2.3 de relèvement de 2 chemins homotopes montre alors que w est homotope à un point.

□□□

5.5 Remarques :

Le revêtement universel d'une surface de Riemann est encore une surface de Riemann par transport de structure (cf. 1.3)

Le théorème 5.4 provient du théorème 5.3 parce que $\tilde{X}$ est canoniquement structurée en variété différentielle grâce à la proposition (cf. godbillon I.3) :

5.6 Proposition : Si $p: Y \rightarrow X$ est un revêtement et si X est une variété différentielle, il existe une et une seule structure différentiable sur Y telle que p soit une submersion.

$$p^{-1}(U_i) \xrightarrow{\Phi_i} U_i \times F_i$$

$$p \downarrow \swarrow \nearrow p_i$$

$$U_i \times F_i \rightarrow U_i \times F_j$$

preuve : Si (U_i, τ_i) est un atlas de X dont les domaines U_i satisfont :

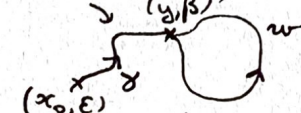
où Φ_i homéom., si $U_i \cap U_j \neq \emptyset$ $\Phi_j \circ \Phi_i^{-1}: (U_i \cap U_j) \times F_i \rightarrow (U_i \cap U_j) \times F_j$ est un difféomorphisme, donc il existe une et une seule structure différentiable sur Y telle que les

homéomorphismes Φ_i soient des difféomorphismes. Alors $p: Y \rightarrow X$ est une submersion et) ^{car} $p = p_i \circ \Phi_i^{-1}$

comme p est un homéom. local, Y et X ont m dimension et p est étale. ^{au voisinage} $p = p_i \circ \Phi_i^{-1}$

Si Y' est une 2-structure diff. sur Y / p de rang maximum, l'identité $i: Y \rightarrow Y'$ est de tout pt. un difféomorphisme. □□□

3 chemins d'après 3)



lacet quelconque

(* sinon, on s'y ramène :

w homotope à $\gamma \circ w \circ \gamma^{-1}$ = lacet d'origine (x_0, E)

autre preuve de la prop. 5.6 :

Soit $p: Y \rightarrow X$ un revêtement et X une variété différentielle. Prenons l'atlas de X $\mathcal{A} = \{(U, \varphi)\}$ formé de cartes dont les domaines vérifient

$$p^{-1}(U) = \bigcup_{i \in I} V_i$$

où $p: V_i \rightarrow U$ est un homéomorphisme

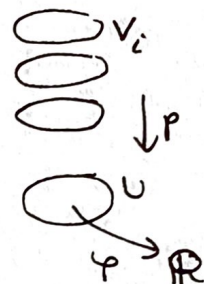
On considère l'atlas $\{(V_i, \varphi \circ p)\}_{i \in I, (U, \varphi) \in \mathcal{A}}$ sur Y .

C'est bien un atlas sur Y , puisque les V_i sont des ouverts de Y , $\varphi \circ p: V_i \rightarrow \varphi(U)$ sont continues bijectives et m des homéomorphismes, et puisque

$$(\varphi \circ p) \circ (\varphi \circ p)^{-1}: \varphi(W) \rightarrow \varphi(U)$$

$$y \mapsto (\varphi \circ p) \circ (\varphi \circ p)^{-1}(y) = \varphi \circ \varphi^{-1}(y) \text{ représente}$$

le difféomorphisme classique de transition de X .



QFD

5.7 Proposition : Soit X une variété analytique connexe. Il existe une surjection canonique de l'espace $\mathcal{O}(\tilde{X})$ des fonctions holomorphes sur le revêtement universel $\tilde{X}$ de X , sur l'espace $\mathcal{M}\mathcal{O}(X)$ des fonctions analytiques multiformes sur X .

preuve :

* Notons $p: \tilde{X} \rightarrow X$ le revêtement universel de X . $\tilde{X}$ est une variété analytique complexe simplement connexe qui peut être décrite de la façon suivante (cf Th. 5.4) :

Fixons $x_0 \in X$ et notons $\mathcal{C}(x_0, x)$ l'ensemble des chemins de x_0 à x pour $x \in X$. Si $\gamma \in \mathcal{C}(x_0, x)$, notons $\{\gamma\} \in \pi(x_0, x)$ la classe d'homotopie de γ (à extrémités fixes).

Alors :

$$\tilde{X} = \{ (x, \{\gamma\}) \mid x \in X \text{ et } \{\gamma\} \in \pi(x_0, x) \}$$

On munit $\tilde{X}$ d'une structure d'espace topologique en considérant la base de topologie formée de tous les ensembles du type :

$$[U, \{\gamma\}] = \{ (y, \{\beta\}) \in \tilde{X} \mid y \in U, \{\beta\} = \{\gamma \circ \nu\} \text{ où } \nu \in \mathcal{C}(x, y) \text{ est inclus dans } U \}$$

où $x \in X$, U désigne un voisinage ouvert de x dans X et γ un chemin de x_0 à x fixé dans X .

On notera $[U, \gamma]$ au lieu de $[U, \{\gamma\}]$ pour simplifier.

On a aussi, dans cette construction, $p(x, \{\gamma\}) = x$.

* Déterminons une application :

$$\begin{array}{ccc} \psi: \mathcal{O}(\tilde{X}) & \xrightarrow{\quad} & \mathcal{M}\mathcal{O}(X) \\ G \longmapsto & \psi(G) = F & \\ \begin{array}{c} (x_0, \gamma_0) \in [U, \gamma_0] \\ p \downarrow \gamma \\ X \supset U \end{array} & \begin{array}{c} \nearrow G \\ \searrow \\ \xrightarrow{F_0} \mathbb{C} \end{array} & \end{array}$$

ainsi :

Si $G \in \mathcal{O}(\tilde{X})$, notons γ_0 le chemin constant $t \mapsto x_0$ de X . Si U est un ouvert connexe et simplement connexe contenant x_0 , posons $F_0 = G \circ (p|_{[U, \gamma_0]})^{-1}$.

Alors F_0 est une fonction holomorphe sur U qui induit un germe $f_0 = p_{x_0}(F_0)$ en x_0 . C'est f_0 qui se prolonge analytiquement le long de tout chemin γ de X d'origine x_0 et d'extrémité x pour donner naissance à la fonction $F \in \mathcal{M}\mathcal{O}(X)$. Enfin, en notant $(f_0)_\gamma$ le germe de fonction holomorphe en x obtenu par prolongement de f_0 le long de γ , on a :

$$\boxed{G(x, \gamma) = (f_0)_\gamma(x)}$$

Cette dernière égalité montre que le diagramme

$$\begin{array}{ccc} \tilde{X} & & \\ p \downarrow & \searrow G & \\ X & \xrightarrow{F} & X \end{array}$$

est commutatif.

Vérifions que :

1) f_0 se prolonge analytiquement le long de $\gamma \in \mathcal{P}(x_0, x)$

Si $\gamma(\tau) \in \text{Im } \gamma$, il existe un ouvert connexe et simplement connexe contenant $\gamma(\tau)$.

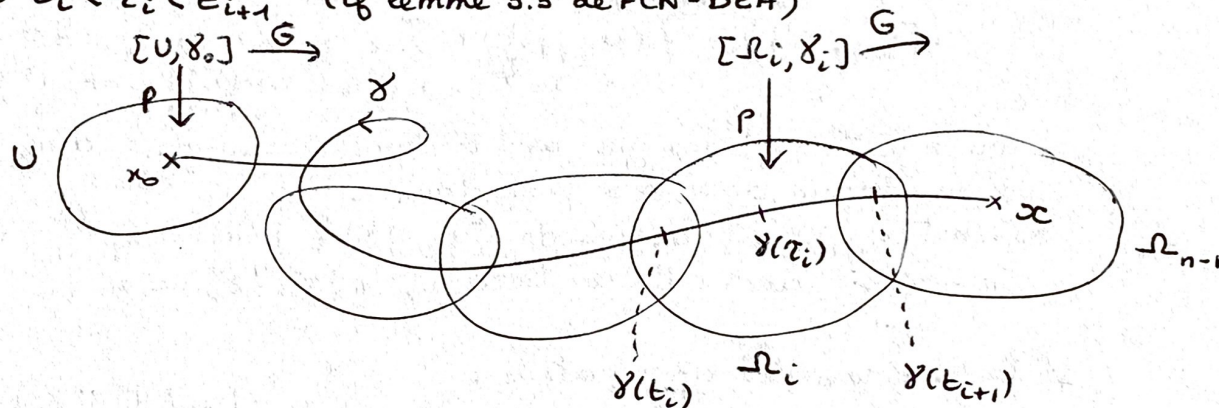
La compacité de $[0, 1]$ montre l'existence d'un sous-recouvrement fini $\{\Omega_i\}_{0 \leq i \leq n-1}$, $\Omega_0 = U$, et d'une suite croissante

$t_0 = 0 < \dots < t_n = 1$ tels que :

1) $\gamma([t_i, t_{i+1}]) \subset \Omega_i$

2) Ω_i connexe, simplement connexe et contient $\gamma(\tau_i)$

où $t_i < \tau_i < t_{i+1}$ (cf lemme 3.3 de FCN-DEA)



Si $\gamma(t) \in \text{Im } \gamma$, notons $\gamma_t(s)$ le chemin γ obtenu pour $0 \leq s \leq t$.
 Les homéomorphismes $p|_{[\Omega_i, \gamma_i]} : [\Omega_i, \gamma_i] \rightarrow \Omega_i$ permettent
 de construire les fonctions holomorphes $F_i = G \circ (p|_{[\Omega_i, \gamma_i]})^{-1} : \Omega_i \rightarrow \mathbb{C}$ qui vérifient les conditions de la définition 1.1
 du prolongement analytique :

$$\begin{cases} p_{x_0}(F_0) = f_0 \\ F_i = F_{i+1} \text{ sur } \Omega_i \cap \Omega_{i+1} \end{cases}$$

(Montrons ce dernier point : si W est un voisinage ouvert connexe et simplement connexe de $\gamma(t_{i+1})$ inclus dans $\Omega_i \cap \Omega_{i+1}$, on a $[W, \gamma_{t_{i+1}}] \subset [\Omega_i, \gamma_{t_i}] \cap [\Omega_{i+1}, \gamma_{t_{i+1}}]$ donc l'homéomorphisme $p|_{[W, \gamma_{t_{i+1}}]}$ est la restriction des homéomorphismes $p|_{[\Omega_i, \gamma_{t_i}]}$ et $p|_{[\Omega_{i+1}, \gamma_{t_{i+1}}]}$, ce qui donne bien $F_i = F_{i+1}$ sur W .)

Enfin, par construction :

$$(\beta_0)_\gamma(x) = F_{n-1}(x) = G \circ (p|_{[\Omega_{n-1}, \gamma_{t_{n-1}}]})^{-1}(x) = G(x, \gamma)$$

2) Il est clair que $F \in \text{MO}(X)$ est parfaitement définie par $G \in \mathcal{O}(\tilde{X})$:

Déterminons $\tilde{X}$ en fixant $x_0 \in X$.

Si $F, F' \in \text{MO}(X)$ proviennent de la même fonction $G \in \mathcal{O}(\tilde{X})$, on aura donc choisi 2 points x_0 et x_1 dans X , 2 fonctions F_0 et F'_1 définies sur des voisinages simplement connexes U_0 et U_1 de x_0 et x_1 respectivement par :

$$\begin{cases} F_0 = G \circ (p|_{[U_0, \gamma_0]})^{-1} \\ F'_1 = G \circ (p|_{[U_1, \gamma_1]})^{-1} \end{cases}$$

où γ_0 est le chemin constant $t \mapsto x_0$

γ_1 est un chemin (fixé une fois pour toute) de x_0 à x_1 .

d'où 2 germes $\beta_0 = \rho_{x_0}(F_0)$ et $\beta'_1 = \rho_{x_1}(F'_1)$ en x_0 et x_1 .

On a clairement,

$$\forall x \in U_1 \quad \forall \gamma \in \mathcal{C}(x_1, x) \quad \gamma \text{ inclus dans } U_1$$

$$(\beta_0)_{\gamma_0 \gamma_1}(x) \stackrel{1)}{=} G(x, \gamma_0 \gamma_1)$$

$$= G \circ (p|_{[U_1, \gamma_1]})^{-1}(x) = F'_1(x)$$

$$(\text{car } (x, \gamma_0 \gamma_1) \in [U_1, \gamma_1])$$

d'où $(\beta_0)_{\gamma_1} = \beta'_1$ puisque $\rho_{x_1}(x \mapsto (\beta_0)_{\gamma_0 \gamma_1}(x)) = (\beta_0)_{\gamma_1}$

Donc $F = F'$ dans $\text{MO}(X)$

* L'application φ est surjective :

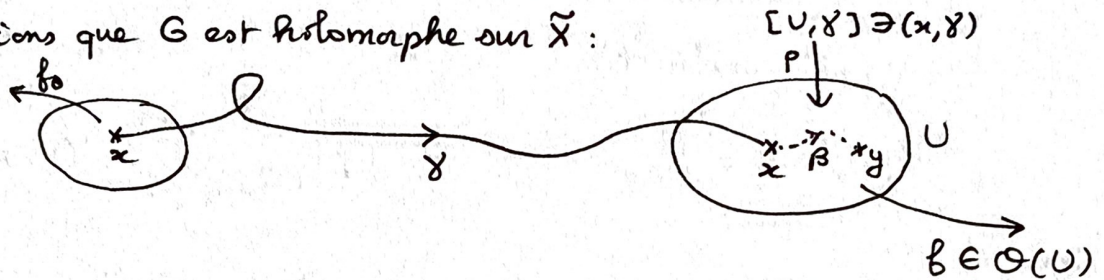
Soit $F \in \mathcal{MO}(X)$, $\tilde{X}$ défini après avoir choisi $x_0 \in X$.

Choisissons $f_0 \in S_F(x_0)$ une branche de F en x_0 . f_0 se prolonge le long de tout chemin $\gamma \in \mathcal{C}(x_0, x)$ pour donner le germe $(f_0)_\gamma$ en $x = \gamma(1)$.

Prenons : $\forall \gamma \in \mathcal{C}(x_0, x)$

$$G(x, \gamma) = (f_0)_\gamma(x)$$

Vérifions que G est holomorphe sur $\tilde{X}$:



Si $(y, \beta) \in [U, \gamma]$ $G(y, \beta) = f(y)$ où f désigne la fonction holomorphe sur l'ouvert simplement connexe U contenant x dont le germe en x est $(f_0)_\gamma$.

En d'autres termes, on a $G = f \circ p$ sur $[U, \gamma]$

On peut supposer que U est le domaine d'une carte de X en x , carte que nous noterons (U, φ) . Alors

$$f \text{ holomorphe sur } U \Leftrightarrow f \circ \varphi^{-1} : \varphi(U) \rightarrow \mathbb{C} \text{ est holomorphe}$$

Comme une carte de $\tilde{X}$ en (x, γ) est donnée par $([U, \gamma], \varphi \circ p)$, on aura simplement :

$$G \text{ holomorphe sur } [U, \gamma] \Leftrightarrow G \circ p^{-1} \circ \varphi^{-1} \text{ holomorphe sur } \varphi(U)$$

ce qui est trivial car $G = f \circ p$ sur $[U, \gamma]$.

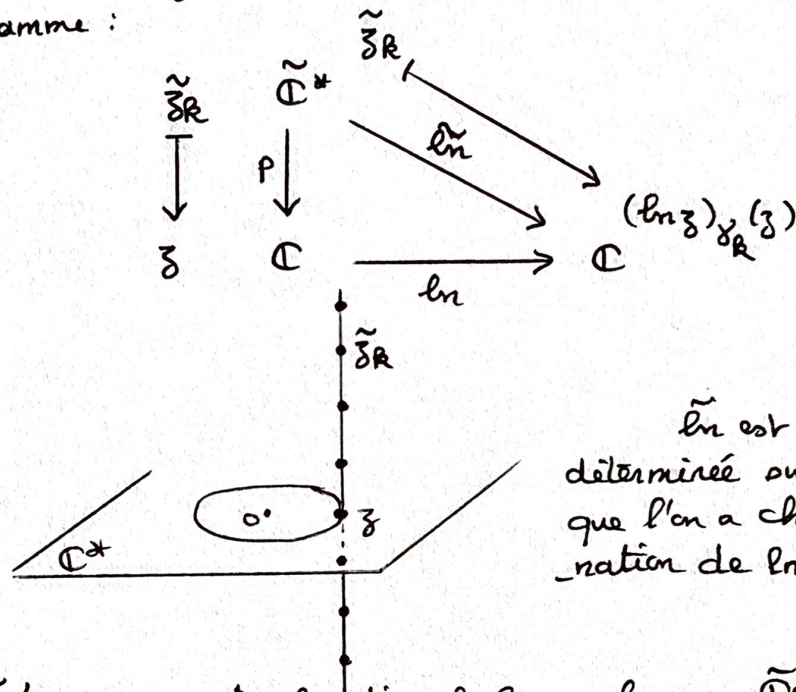
CQFD

Remarque : C'est le choix de la branche f_0 de F en x_0 qui montre que F peut avoir beaucoup d'antécédents dans $\mathcal{O}(\tilde{X})$ (autant que de déterminations).

5.8 Exemple

$\ln : \mathbb{C}^* \rightarrow \mathbb{C}$ est une fonction analytique multiforme qui s'interprète comme une fonction holomorphe $\tilde{\ln}$ sur le revêtement universel $\tilde{\mathbb{C}}^*$ de $\mathbb{C}^*$:

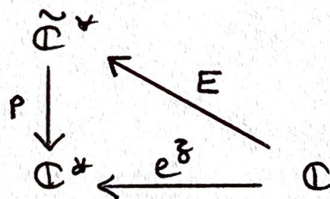
Notons $\tilde{\gamma}_k = (z, \gamma_k)$ où γ_k désigne le cercle γ de centre 0 de rayon $|z|$ parcouru k fois dans le sens direct ($k \in \mathbb{Z}$). On a le diagramme :



$\tilde{\ln}$ est parfaitement déterminée sur $\tilde{\mathbb{C}}^*$ une fois que l'on a choisi une détermination de $\ln$ en z .

Si $\tilde{\ln}'$ est une autre fonction holomorphe sur $\tilde{\mathbb{C}}^*$ représentant $\ln \in \text{MO}(\mathbb{C}^*)$, on aura $\tilde{\ln}' - \tilde{\ln} = i k 2\pi$ où $k \in \mathbb{Z}$.

Remarquons que $\tilde{\ln}$ est un isomorphisme analytique de $\tilde{\mathbb{C}}^*$ sur $\mathbb{C}$ puisque $\tilde{\ln}$ est bijective d'inverse $E : \mathbb{C} \rightarrow \tilde{\mathbb{C}}^*$ qui relève l'exponentielle :



donc E est analytique (cf structure analytique de $\tilde{\mathbb{C}}^*$ donnée grâce à p , cf prop. 5.6).

On dit que le revêtement universel $\tilde{\mathbb{C}}^*$ de $\mathbb{C}^*$ est égal à la surface de Riemann du Logarithme.